# konsultacje w tym semestrze: wtorek 11:30-13 i sroda 13:30-15

**Elżbieta Roszkowska**

**ZPCiR I-6 PWr**

**pokój 310 C3**

`ekr@.pwr.wroc.pl`

# RACHUNEK ZBIORÓW

# TEORIA ZBIORÓW A RACHUNEK PREDYKATÓW

Pojęcie *zbioru* jest intuicyjnie zrozumiałe i w matematyce w można uważać je za pojęcie pierwotne. Wówczas korzysta się z pojęcia zbioru w konstrukcji rachunku predykatów.

Alternatywnie rozważa się też w logice odwrotną sytuację. Mówiąc o predykatach, nie używa się pojęcia zbioru, a pojęcia *uniwersum rozważań* $E$, z którego zmienne występujące w predykatach mogą czerpać swoje wartości. Predykat unarny $R(x)$ jest zatem takim wyrażeniem, że po podstawieniu w miejsce ogólnego obiektu $x$ konkretnego obiektu $e$ z uniwersum $E$ otrzymujemy zdanie logiczne. *Zbiór* jest wówczas pojęciem pochodnym pojęcia predykatu $R(x)$ i oznacza kolekcję wszystkich tych konkretnych obiektów $e$, dla których zdanie $R(e)$ jest prawdziwe.

# ZBIORY I ELEMENTY

**Przykład 1** Niech uniwersum $E$ składa się z liczb naturalnych, a $P(x)$ będzie predykatem $x$ *jest parzyste*. Predykat ten wyznacza zbiór parzystych liczb naturalnych $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots$

**Definicja 1** Niech $P(x)$ będzie predykatem unarnym określonym w uniwersum $E$. Obiekt złożony, składający się ze wszystkich obiektów $x$ w uniwersum $E$ takich że $P(x)$ jest prawdziwe, jest *zbiorem*. Zbiór taki określa się jako:

$$\{x : P(x)\} \quad \text{lub} \quad \{x \mid P(x)\}$$

**Definicja 2** Rozważmy zbiór $A = \{x : P(x)\}$ i obiekt $a$ taki, ze $P(a)$ jest prawdą. Obiekt $a$ będziemy nazywać elementem zbioru $A$ i oznaczać przez $a \in A$, natomiast $b \notin A$ oznacza, że obiekt $b$ nie należy do $A$.

Powyższa notacja może być również użyta w definicji zbioru dla jawnego określenia rozważanego uniwersum $E$

$$A = \{x \in E : P(x)\}$$

Zbiór określony przez koniunkcję predykatów będzie definiowany jako

$$A = \{x \in E : P(x), Q(x), \ldots\}$$

raczej niż

$$A = \{x \in E : P(x) \ \wedge \ Q(x) \ \wedge \ \ldots\}$$

Można także zdefiniować zbiór kwadratów elementów $x \in X$ w sposób

$$\{x^2 : x \in X\}$$

zamiast dłuższego zapisu

$$\{y : y = x^2, x \in X\}$$

Innym sposobem wyszczególnienia elementów zbioru jest ich wylistowanie, np. $\{1,2,3\}$ lub w ogólności:

$$\{x_1,\ldots,x_n\} = \{x : (x = x_1) \ \vee \ (x = x_2) \ \vee \ \ldots \ \vee \ (x = x_n)\}$$

Możemy nawet użyć nieskończonej listy, ale interpretacja zbioru musi być jednoznaczna. Na przykład zapis

$$\{1,2,3,\ldots\}$$

może być rozumiany zarówno jako liczb pierwszych, zbiór liczb gdzie element trzeci i dalsze są sumą dwu poprzednich, jak i wiele innych.

# NIEKTÓRE ZBIORY SZCZEGÓLNE

- zbiór liczb naturalnych

$$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

- zbiór liczb całkowitych

$$\mathcal{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

- zbiór liczb całkowitych dodatnich

$$\mathcal{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

- zbiór liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ - używany do reprezentacji wartości ciągłych ( nie da się go określić za pomocą listowania, można go zdefiniować w sposób aksjomatyczny)

- zbiór liczb wymiernych

$$\mathcal{Q} = \{x \in \mathcal{R} : x = p/q, p \in \mathcal{Z}, q \in \mathcal{Z}^{+}\}$$

- zbiór pusty $A = \emptyset$, określony za pomocą predykatu $P(x)$, który dla każdej wartości $x \in E$ jest fałszywy, np.

$$\{x \in \mathcal{R} : x^2 = -1\} \quad \text{lub} \quad \{x \in \mathcal{N} : 2 < x < 3\}$$

- zbiór uniwersalny $E$, określony za pomocą predykatu $P(x)$, który dla każdej wartości $x \in E$ jest prawdziwy, np.

$$A = \{x \in \mathcal{R} : x^2 = (x-1)(x+1)+1\}$$

definiuje zbiór $A$ jako równy zbiorowi uniwersalnemu $\mathcal{R}$

**Definicja 3** Niech $A$ będzie zbiorem. *rozmiar* lub *moc* zbioru $A$, zapisywane jako $|A|$, oznacza liczbę elementów tego zbioru.

**Zadanie 1** Wylistuj następujące zbiory:

- $\{x \in \mathcal{R} : x^2 = 4\}$, $\{x \in \mathcal{R} : x^2 + 3x + 2 = 0\}$, $\{x \in \mathcal{R} : x^3 + 1 = 0\}$
- $\{x \in \mathcal{R} : sin\,\pi x = 1\}$, $\{x \in \mathcal{R} : sin\,x = sin\,2x\}$
- $\{x \in \mathcal{Q} : x^2 = 2\}$, $\{x \in \mathcal{Q} : x^3 = 2\}$
- $\{x \in \mathcal{Z}^+ : x^x = 2x\}$, $\{x \in \mathcal{Z} : 2^x = 3^x\}$

# PODZBIORY

**Definicja 4** Niech $A$ i $B$ będą zbiorami. Załóżmy, że dla każdego elementu $a \in A$ zachodzi $a \in B$. Mówimy wówczas, że $A$ jest *podzbiorem* $B$ lub $B$ jest nadzbiorem $A$, co zapisujemy $A \subseteq B$ lub $B \supseteq A$.

**Definicja 5** Niech $A$ i $B$ będą zbiorami. Jeżeli zachodzi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$ to zbiory $A$ i $B$ są *równe* lub *identyczne* , co zapisujemy $A = B$. W przeciwnym przypadku $A \neq B$.

**Definicja 6** Jeżeli $A$ i $B$ są zbiorami oraz $A \subseteq B$ i $A \neq B$ to mówimy, że $A$ jest *właściwym podzbiorem* $B$ lub $B$ jest *właściwym nadzbiorem* $A$, co zapisujemy $A \subset B$ lub $B \supset A$.

Relacje $\subseteq$ i $\subset$ nazywane są *inkluzją* lub *zawieraniem się* zbiorów. Określa je warunek $\forall a\,(a \in A \Rightarrow a \in B)$.

**Przykład 2** Pomiędzy wcześniej wyróżnionymi zbiorami zachodzi relacja inkluzji: $\emptyset \subset \mathcal{Z}^+ \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$

**Definicja 7** Niech $S$ będzie zbiorem, którego elementy należą do zbioru uniwersalnego $E$. *zbiór potęgowy* zbioru $S$ jest zdefiniowany jako

$$P(S) = \{A \subseteq E : A \subseteq S\}$$

A zatem zbiór potęgowy określa warunek: $A \in P(S) \Leftrightarrow A \subseteq S$

**Przykład 3** Zbiorem potęgowym zbioru $S = \{1,2\}$ jest

$$P(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

**Zadanie 2** Pokaż że $\{x \in \mathcal{R} : |x| < 1\} = \{tan^{-1} x : x \in \mathcal{R}\}$

**Zadanie 3** Wykaż prawdziwość albo fałsz następującej inkluzji:

$$\{x \in \mathcal{R} : |x| < 1\} \subset \{x \in \mathcal{R} : x^2 + 2x < 3\}$$

# DOPEŁNIENIA I RÓŻNICE

Skoro zbiór wyznacza się za pomocą unarnego predykatu określonego na uniwersum $E$, to można by się zastanowić, co otrzymamy, jeżeli zanegujemy ten predykat.

**Definicja 8** Niech $E$ będzie zbiorem uniwersalnym, a $A$ jego podzbiorem. Dopełnieniem zbioru $A$ jest zbiór

$$A' = \{x \in E : x \notin A\}$$

Spotyka się też inne oznaczenia dopełnienia $A$, takie jak np. $\bar{A}$, $A^c$ lub $\mathcal{C}(A)$. Żadna z tych notacji nie odwołuje się jednak do $E$ i dlatego zbiór uniwersalny musi być jawnie określony.

**Przykład 4** Zauważmy, że jeżeli $E = \mathcal{Z}$, to $\mathcal{N}'$ ma inne znaczenie niż gdy $E = \mathcal{R}$. Gdybyśmy użyli notacji $\mathcal{C}_E(A)$ dla oznaczenia rozważanego uniwersum, to otrzymamy $0,5 \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(\mathcal{N})$, ale $0,5 \notin \mathcal{C}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{N})$

**Definicja 9** Niech $A$ i $B$ będą podzbiorami zbioru uniwersalnego $E$. *Różnica* $A$ i $B$ jest zbiorem:

$$A - B = \{x \in E : x \in A, x \notin B\}$$

Jak widać, jeżeli zbiory $A$ i $B$ są wyznaczone predykatami $P(x)$ i $Q(x)$, to ich różnicę określa predykat $P(x) \wedge \neg Q(x)$.

**Przykład 5** Dla $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ i $B = \{1,3,5,7,9\}$, $A - B = \{2,4,6\}$

# SUMY I ILOCZYNY

Po rozważeniu zbiorów wyznaczonych poprzez negację predykatu, spójrzmy na zbiory powstałe w wyniku alternatywy i koniunkcji predykatów.

**Definicja 10** Niech $A$ i $B$ będą podzbiorami zbioru uniwersalnego $E$. *Suma* $A$ i $B$ jest zbiorem:

$$A \cup B = \{x \in E : (x \in A) \ \vee \ (x \in B)\}$$

a ich iloczyn jest zbiorem:

$$A \cap B = \{x \in E : (x \in A) \ \wedge \ (x \in B)\}$$

Suma i iloczyn są operacjami łącznymi i dlatego mogą być zastosowane do dowolnej liczby zbiorów.

A zatem:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

oznacza zbiór wszystkich elementów należących do $E$, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów $A_1, \ldots, A_n$. Podobnie:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

oznacza zbiór wszystkich elementów należących do $E$, które są wspólne dla wszystkich zbiorów $A_1, \ldots, A_n$. Dla takiej sumy i iloczynu stosujemy też oznaczenia:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{oraz} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Określa się także sumę i iloczyn nieskończonej liczby zbiorów.

$$A_0 \cup A_1 \cup \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} A_i$$

$$A_0 \cap A_1 \cap \ldots = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \bigcap_{i \in \mathcal{N}} A_i$$

Zbiór $\mathcal{N}$ jest wówczas nazywany zbiorem indeksów.

Notacja taka może być zastosowana do dowolnego zbioru, niezależnie od tego jak jest indeksowany oraz czy jest skończony czy nie. Otrzymujemy zatem:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E : \exists i \in I \ (x \in A_i)\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E : \forall i \in I \ (x \in A_i)\}$$

**Definicja 11** Niech $A$ i $B$ będą podzbiorami zbioru uniwersalnego $E$. Jeżeli $A \cap B = \emptyset$ to zbiory te nazywamy rozłącznymi.

**Przykład 6** $\{1,2,3\}\cup\{2,4,6\}\cup\{3,6,9\}=\{1,2,3,4,6,9\}$

**Przykład 7** $\{1,3,5,7\}\cap\{2,5,9\}\cap\{1,2,3,4,5,6\}=\{1,5\}$

**Zadanie 4** Pokaż, że jeżeli $A,B\subseteq E$ to $A-B=A\cap B'$.

# PRAWA ROZDZIELNOŚCI

**Przykład 8** Rozważmy zbiór klientów banku KPO którzy mają debet, a także mają kartę Mister lub kartę Waza (względnie obie karty). Są to klienci, którzy mają debet i kartę Mister lub mają debet i kartę Waza (lub obie karty).

Rozważmy następnie zbiór klientów, którzy mają debet lub obie karty. Są to klienci, którzy mają debet lub kartę Waza, a także mają debet lub kartę Mister.

**Twierdzenie 1** Dla zbiorów $A, B, C \subseteq E$ zachodzi:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

<u>Dowód.</u> Zastanowić sie w domu. Wskazówka: zdefiniować zbiory $A, B, C$ za pomocą predykatów. Wrócimy do tego na następnym wykładzie.

# PRAWA DE MORGANA

**Przykład 9** Rozważmy zbiór komputerów, które nie używają procesora Outel z zegarem 1GHz. Jest to zbiór komputerów, które albo nie używają procesora Outel albo nie mają zegara 1 GHz. Jest to też suma zbiorów komputerów z procesorem innym niż Outel i zbioru procesorów z zegarem innym niż 1GHz.

**Przykład 10** Rozważając zbiór komputerów które nie mają dysku HD lub CD, rozważamy zbiór komputerów, które nie mają dysku HD i nie mają także dysku CD. Jest to iloczyn zbiorów komputerów bez dysku HD i zbioru komputerów bez dysku CD.

**Twierdzenie 2** Dla zbiorów $A, B \subseteq E$ zachodzi:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Dowód. Zastanowić sie w domu. Wskazówka: zdefiniować zbiory $A, B$ za pomocą predykatów. Wrócimy do tego na następnym wykładzie.