DOWODZENIE IDENTYCZNOŚCI WYRAŻEŃ

RACHUNKU ZBIORÓW

PRAWA IDENTYCZNOśCI

Rozważmy następujące równanie:

$$((A \cup B) - (C \cap D)) \cap (B \cap D)' = (A \cap C) \cup (B \cap D')$$

Istnieją trzy różne przypadki takiej identyczności:

1. jest *prawdziwa* bez względu na to, jakie weźmiemy zbiory A, B, C i D
2. jest *fałszywa* bez względu na to, jakie weźmiemy zbiory A, B, C i D
3. jest *prawdziwa* dla pewnych wybranych kombinacji zbiorów A, B, C i D, a *fałszywa* dla innych.

Aby powyższe równanie było prawdziwe w rachunku zbiorów, musi zachodzić przypadek (1).

Nie wystarczy pokazać, że równanie to jest spełnione dla szczególnej kombinacji zbiorów. Taki wynik jedynie eliminuje możliwość (2), ale nie rozróżnia przypadków (1) i (3).

Na przykład, jeżeli w powyższym przykładzie przyjmiemy $A = B = C = D = \emptyset$, to otrzymamy $E = E$, co jest prawdą. Nie dowodzi to jednak prawdziwości tej identyczności, która zresztą wcale nie zachodzi.

Zadanie 1 Znajdź kombinację zbiorów, która pokazuje, że powyższa identyczność nie jest prawdą.

Takie odwoływanie się do konkretnych zbiorów jest powszechnym błędem przy dowodzeniu identyczności. Poprawna metoda to zapisanie takich zbiorów za pomocą predykatów lub użycie tzw. *postaci normalnej zbiorów* (a także dwie inne metody, o których będziemy mówić później).

Następujące identyczności można łatwo wykazać odwołując się do predykatowej definicji zbioru.

Negacja:

$$E' = \emptyset,\ \emptyset' = E,\ (A')' = A$$

Dominacja:

$$A \cap E = A,\ A \cap \emptyset = \emptyset,\ A \cup E = E,\ A \cup \emptyset = A$$

Idempotencja:

$$A \cap A = A,\ A \cup A = A$$

Rozdzielność:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Przemienność:

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$$

Łączność:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Ekskluzja:

$$A \cup A' = E,\ A \cap A' = \emptyset$$

Trywialna Inkluzja:

$$\emptyset \subseteq A \subseteq E$$

Prawa de Morgana:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',\ \ (A \cap B)' = A' \cup B'$$

Absorpcja:

$$A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A$$

Inkluzja dopełnień:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$$

Definicje:

$$\begin{aligned} A \subseteq B\ &\Leftrightarrow A \cap B' = \emptyset \\ A = B\ &\Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A' \cap B') = E \end{aligned}$$

DOWODY TWIERDZEŃ

Rozważmy raz jeszcze twierdzenia z poprzedniego wykładu.

Twierdzenie 1 Dla zbiorów $A, B, C \subseteq E$ zachodzi:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Twierdzenie 2 Dla zbiorów $A, B \subseteq E$ zachodzi:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Załóżmy, że

$$A = \{x \in E : P(x)\},\ \ B = \{x \in E : Q(x)\},\ \ C = \{x \in E : R(x)\}$$

Udowodnimy, że:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Z definicji iloczynu:

$$B \cap C = \{x \in E : Q(x) \wedge R(x)\}$$

A zatem, korzystając z prawa rozdzielności w rachunku zdań:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x \in E : P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x))\} \\ &= \{x \in E : (P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(x) \vee R(x))\} \\ &= \{x \in E : P(x) \vee Q(x))\} \cap \{x \in E : P(x) \vee R(x))\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

analogicznie możemy pokazać, że:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Z definicji sumy:

$$B \cup C = \{x \in E : Q(x) \vee R(x)\}$$

A zatem:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x \in E : P(x) \wedge (Q(x) \vee R(x))\} \\ &= \{x \in E : (P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge R(x))\} \\ &= \{x \in E : P(x) \wedge Q(x))\} \cup \{x \in E : P(x) \wedge R(x))\} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Podobną metodą można wykazać, że:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Z definicji:

$$A \cup B = \{x \in E : P(x) \vee Q(x)\}$$

$$A' = \{x \in E : \neg P(x)\}, \quad B' = \{x \in E : \neg Q(x)\}$$

A zatem, korzystając z praw de Morgana w rachunku zdań:

$$\begin{aligned} (A \cup B)' &= \{x \in E : \neg(P(x) \vee Q(x))\} \\ &= \{x \in E : \neg P(x) \wedge \neg Q(x)\} \\ &= \{x \in E : \neg P(x)\} \cap \{x \in E : \neg Q(x)\} \\ &= A' \cap B' \end{aligned}$$

a także, że zachodzi:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Z definicji:

$$A \cap B = \{x \in E : P(x) \wedge Q(x)\}$$

$$A' = \{x \in E : \neg P(x)\}, \quad B' = \{x \in E : \neg Q(x)\}$$

A zatem, korzystając z drugiego prawa de Morgana w rachunku zdań:

$$\begin{aligned}
(A \cap B)' &= \{x \in E : \neg(P(x) \wedge Q(x))\} \\
&= \{x \in E : \neg P(x) \vee \neg Q(x)\} \\
&= \{x \in E : \neg P(x)\} \cup \{x \in E : \neg Q(x)\} \\
&= A' \cup B'
\end{aligned}$$

POSTAĆ NORMALNA

Jak widać, przy takim podejściu do definicji zbioru jakie zastosowaliśmy - kolekcji obiektów, dla których prawdziwy jest pewien predykat - rachunek zbiorów można sprowadzić do rachunku zdań. W ten sposób można też udowodnić pozostałe prawa podane na poprzednim wykładzie.

W praktyce dowodzenie identyczności poprzez zdefiniowanie poszczególnych zbiorów za pomocą predykatów jest niewygodne, a łatwiej jest przekształcić obie strony równania do tzw. postaci normalnej, to jest sumy iloczynów

Definicja 1 Wyrażenie rachunku zbiorów ma *postać normalną*, jeżeli jest postaci:

$$\bigcup_{i=1}^{n}\left(\bigcap_{j=1}^{m} X_{ij} \right)$$

gdzie: X_{ij} oznacza zbiór A_j lub jego dopełnienie A'_j do uniwersum E, $i \in 1..n,\ j \in 1..m$.

Jak widać, postać normalna w rachunku zbiorów jest odpowiednikiem formuły w postaci DNF, która w każdym nawiasie zawiera komplet literałów.

Przykład 1 Wyrażenie w postaci normalnej:

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C') \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C)$$

Podane wcześniej prawa identyczności pozwalają sprowadzic do postaci normalnej dowolne wyrażenie rachunku zbiorów w sposób analogiczny, jak się to robi w rachunku zdań:

1. Przekształć wyrażenie tak, aby pozostały tylko operacje sumy, iloczynu i dopełnienia
2. Usuń dopełnienia wyrażeń w nawiasach za pomocą praw de Morgana
3. Przekształć iloczyny zawierające wyrażenia w nawiasach za pomocą praw rozdzielności
4. Usuń powtarzające się iloczyny
5. Rozbuduj wyrażenia w nawiasach, tak aby każdy zbiór lub jego dopełnienie wystąpił w każdym iloczynie
6. Usuń powtarzające się iloczyny

Przykład 2

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C)' &= A \cap (B' \cup C') \\ &= (A \cap B') \cup (A \cap C') \\ &= (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A \cap B \cap C') \end{aligned}$$

Przykład 3

$$\begin{aligned} (A \cap B')' \cap (A \cup C) &= (A' \cup B) \cap (A \cup C) \\ &= ((A' \cup B) \cap A) \cup ((A' \cup B) \cap C) \\ &= ((A' \cap A) \cup (B \cap A)) \cup ((A' \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= (A \cap B) \cup (A' \cap C) \cup (B \cap C) \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C') \cup (A' \cap B \cap C) \cup \\ &\qquad (A' \cap B' \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C') \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C) \end{aligned}$$

Jeżeli dwa wyrażenia są w postaci normalnej, to sprawdzenie ich identyczności staje się trywialne. Sprawdzamy po prostu, czy te same termy występują po obu stronach równania. Jeżeli są zgodne, to mamy dwa identyczne wyrażenia. Jeżeli się różnią, to łatwo jest znaleźć kombinację zbiorów, która spełnia jedno z wyrażeń, a nie spełnia drugiego, co dowodzi, ze badana identyczność nie zachodzi.

Przykład 4 Załóżmy, że mamy dwa wyrażenia, które redukują się do:

$$(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C') \quad (*)$$

oraz

$$(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C') \quad (**)$$

Zauważmy, że term $(A' \cap B \cap C')$ występuje w pierwszym wyrażeniu, ale nie w drugim. Użyjemy go do skonstruowania kolekcji zbiorów, które wykażą, że wyrażenia te różnią się.

Załóżmy, że $E = \{1\}$, $A = C = \emptyset$, $B = E$. Zbiór określony wyrażeniem $(*)$ zawiera 1, ponieważ $A' = B = C' = \{1\}$. Natomiast każdy z termów w drugim wyrażeniu jest zbiorem pustym: $(A \cap B \cap C) = \emptyset$, ponieważ $A = \emptyset$, $A' \cap B' \cap C = \emptyset$, ponieważ $C = \emptyset$, $(A' \cap B' \cap C') = \emptyset$, ponieważ $B' = \emptyset$. Stąd całe wyrażenie $(**)$ określa zbiór pusty, a zatem wyrażenia $(*)$ i $(**)$ nie są identyczne.

DIAGRAMY VENNA

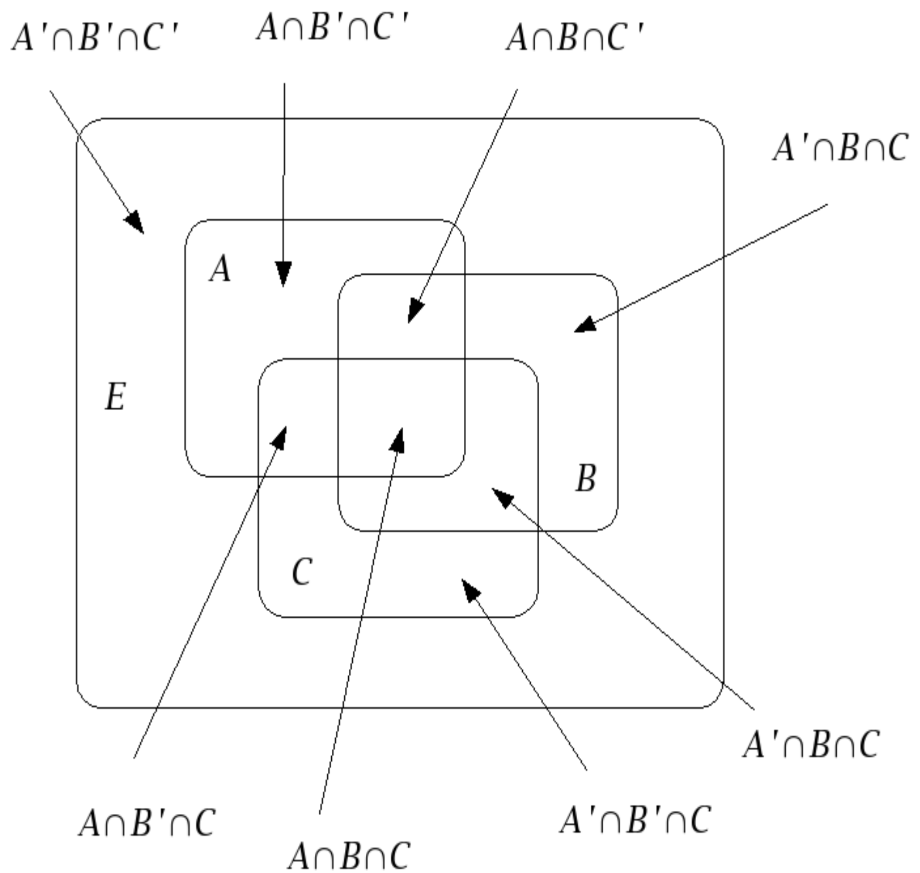
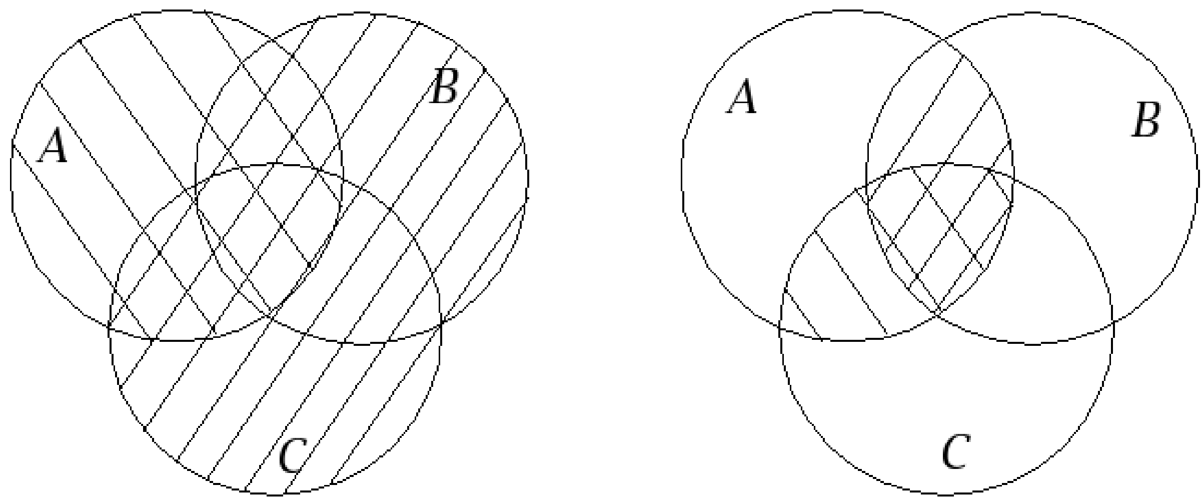


diagram Venna dla trzech zbiorów

DOWODZENIE IDENTYCZNOŚCI ZA POMOCA DIAGRAMÓW VENNA



$A \cap (B \cup C) \quad = \quad (A \cap B) \cup (A \cap C)$

dowód prawa rozdzielności za pomocą diagramu Venna

Dowody identyczności za pomocą diagramów Venna wydają się bardziej intuicyjne i znacznie prostsze niż innymi metodami, jednak metoda ta ma ograniczenia.

Ponieważ zbiory muszą być narysowane w sposób ogólny, np. tak aby każdy z każdym miał część wspolną, nie jest to praktycznie możliwe dla większej ilości zbiorów.

Zadanie 2 Narysować (w domu) diagram Venna dla (a) czterech zbiorów, a następnie spróbować to samo dla (b) pięciu zbiorów.

Zadanie (a) jest już dosyć trudne, a (b) wydaje się prawie niemożliwe.

TABELE PRZYNALEŻNOŚCI

Odpowiednikiem tabeli prawdy w logice są w teorii zbiorów *tabele przynależności*.

Są to tabele, które listują poszczególne obszary diagramów Venna, a zatem pod względem logicznym stanowią równoważną technikę analizy, a jednocześnie nie posiadają wad związanych z reprezentacją graficzną diagramów Venna.

Dla $A \subseteq E$ i $x \in E$, *wartością przynależności* x do A jest **T**, jeżeli $x \in A$, oraz **F**, w przeciwnym przypadku.

Dla dwóch zbiorów, A i B, istnieją cztery możliwe kombinacje wartości przynależności zmiennej x: 1) $x \in A$, $x \in B$, co daje **TT**, 2) $x \in A$, $x \notin B$, co daje **TF**, 3) $x \notin A$, $x \in B$, co daje **FT**, 4)) $x \notin A$, $x \notin B$, co daje **FF**.

W ogólności, dla zbiorów $A_1, A_2, \ldots A_n$ istnieje 2^n kombinacji przynależności. Dla każdej z tych kombinacji, można określić wartość dowolnego wyrażenia $X(A_1, A_2, \ldots A_n)$, utworzonego z sum, iloczynów i dopełnień jego argumentów.

Definicja 2 Dla wyrażenia $X(A_1, A_2, \ldots A_n)$, tabela składająca się z 2^n rzędów i $n+1$ kolumn, gdzie każdy z rzędów listuje inną kombinację wartości przynależności argumentów $A_1, A_2, \ldots A_n$ oraz wartość $X(A_1, A_2, \ldots A_n)$, jest *tabelą przynależności* wyrażenia X.

Tabele przynależności są wyliczane tak samo jak tabele prawdy w rachunku zdań. Dwa wyrażenia są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy ich tabele przynależności są identyczne.

Przykład 5 Poniższa tabela jest jeszcze jednym dowodem prawa rozdzielności $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A\ B\ C$	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
T T T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T T F	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**
T F T	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**
T F F	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**
F T T	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**
F T F	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**
F F T	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**
F F F	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**

ILOCZYNY KARTEZJAŃSKIE

Przypomnijmy, że w naszych rozważaniach predykat jednoargumentowy $P(x)$ definiuje zbiór $A = \{x \in E : P(x)\}$. Zastanowimy się obecnie, co w teorii zbiorów definiuje predykat dwuargumentowy $P(x,y)$. Jeżeli obiekt definiowany ma być zbiorem, to elementy tego zbioru muszą posiadać jakiś związek z dwoma elementami uniwersum E.

Przykład 6 Niech E będzie zbiorem ludzi i niech $P(x,y)$ oznacza x *jest rodzicem* y. Predykat ten jest prawdziwy dla pary osób:
$a =$ Roman Kowalski i $b =$ Ania Kowalska takich, że Roman jest ojcem Ani. Zwróćmy uwagę, ze istotna jest tu kolejność argumentów: $P(a,b)$ jest zdaniem prawdziwym, podczas gdy $P(b,a)$ jest fałszywe.

Predykat $P(x,y)$ z argumentami x,y należącymi do uniwersum E może być również widziany jako predykat unarny w uniwersum F, którego elementami są uporządkowane pary $z=(x,y)$ takie że $x,y \in E$.

Definicja 3 Uporządkowana parą elementów ze zbioru A jest para (x,y), gdzie $x,y \in A$. Dwie pary (x_1,y_1) i (x_2,y_2) są równe wtedy i tylko wtedy gdy $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

To samo możemy zdefiniować bardziej ogólnie, dla *n-tki* elementów ze zbioru A.

Definicja 4 Dla każdego $n \in \mathcal{Z}^+$, obiekt $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ taki, że $x_1,x_2,\ldots,x_n \in A$ jest nazywany *uporządkowaną n-tka* elementów ze zbioru A. Dwie n-tki $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ i $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ są uważane za równe wtedy i tylko wtedy gdy $x_i = y_i$ dla każdego $1 \leq i \leq n$.

Przykład 7 Wylistujemy wszystkie uporządkowane trójki elementów ze zbioru $A = \{1, 0\}$. Są to: $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

Mając określony zbiór A i liczbę $n \in \mathcal{Z}^+$, możemy utworzyć zbiór wszystkich n-tek ze zbioru A.

Definicja 5 Niech A będzie zbiorem, a $n \in \mathcal{Z}^+$ dodatnią liczbą całkowitą. n-ta potęgą zbioru A jest zbiór wszystkich n-tek ze zbioru A

$$A^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in A\}$$

Należy starannie rozróżnić pomiędzy wyżej zdefiniowaną n-tą potęgą zbioru A, a wcześniej zdefiniowanym zbiorem potęgowym (patrz Def. **??**), który składa się ze wszystkich podzbiorów A. Podzbiór $\{1, 3\}$ zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ nie jest tym samym, co para $(1, 3)$. $\{1, 3\}$ i $\{3, 1\}$ określają ten sam podzbiór, podczas gdy $(1, 3)$ i $(3, 1)$ są to dwie różne pary ze zbioru A.

Przykład 8 Jeżeli $A = \{a,b\}$ to $A^2 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$.

W ogólności n-tki mogą być tworzone z elementów różnych zbiorów. Operacja w wyniku której powstaje taki zbiór n-tek nazywa się iloczynem kartezjańskim (od nazwiska słynnego filozofa i matematyka - Kartezjusza).

Definicja 6 Iloczyn kartezjański zbiorów A i B jest zbiorem

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

Iloczyn kartezjański n zbiorów definiuje się jako:

$$A_1 \times A_2 \times \cdot \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i \in 1..n\}$$

Zauważmy, że:

- $A \times B$ i $B \times A$ są to w ogólności różne zbiory
- jeżeli jeden ze zbiorow A_i, $i \in 1,..n$, jest pusty, to nie da się utworzyć zadna n-tka, a zatem iloczyn $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ jest zbiorem pustym.

Przykład 9 Dla zbiorów $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{2,4\}$, wyznaczymy $A \times B$, $B \times A$, i $(A \times B) \cap (B \times A)$.

$A \times B = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$

$B \times A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$

$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(2,2)\}$