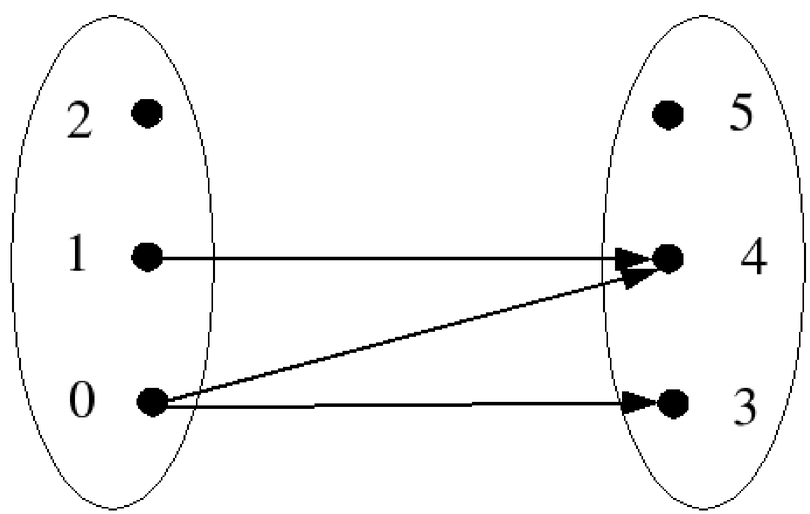
RELACJE

DEFINICJA

Definicja 1 Niech A i B będą zbiorami. Relacja R pomiędzy A i B jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego tych zbiorów, $R \subseteq A \times B$.

$$R \subseteq \{0,1,2\} \times \{3,4,5\}$$



Przykład 1 Wróćmy do przykładu rozważanego dla ilustracji pojęcia iloczynu kartezjańskiego. Dla zbiorów $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 4\}$ wyznaczyliśmy wówczas:

$$A \times B = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$$

Załóżmy, że element $a \in A$ jest w relacji R z elementem $b \in B$, jeżeli a jest podzielnikiem b. A zatem:

$$R \subseteq \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$$

$$R = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4)\}$$

Relacje mogą być także określone pomiędzy elementami tego samego zbioru, a także dotyczyć zbiorów nieskończonych i nieprzeliczalnych

Przykład 2 Relacja mniejszości w zbiorze liczb rzeczywistych $R \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ jest określona jako: $\{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : x < y\}$

Nie zawsze jest możliwe zapisanie relacji za pomocą prostej ogólnej formuły. Wtedy zdefiniowanie relacji wymaga wylistowania par, które do niej należą.

Przykład 3 Niech A będzie zbiorem nazwisk pracowników pewnej firmy i niech relacja $(x,y) \in R$ oznacza, że bezpośrednim przełożonym pracownika x jest pracownik y. W ogólnym przypadku nie da się tu podać żadnej formalnej zależności pomiędzy nazwiskami pracowników, która wskazywałaby na ich podporządkowanie w strukturze firmy. A zatem, najprostszą metodą jest sporządzenie takiej listy, np.
$\{$(Kowalski, Malinowski), (Janeczek, Malinowski), (Malinowski, Brzęczyk)$, \ldots\}$

DZIEDZINA I ZAKRES

Przykład 4 Bank KPO posiada listę swoich klientów wraz z numerami ich kont bankowych. Numery kont są dodatnimi liczbami całkowitymi składającymi się z nie więcej niż ośmiu cyfr.

Niewątpliwie istnieje tu relacja $R \subseteq A \times B$ pomiędzy liczbami, a nazwiskami. Czym jednak z matematycznego punktu widzenia są zbiory A i B ?

Moglibyśmy założyć, że A jest zbiorem tych liczb, które odpowadają numerom kont, a B zbiorem tych nazwisk, które odpowiadają nazwiskom klientów banku? Co jednak zrobic, gdy dojdą nowi lub ubędą starzy klienci? Czy zbiory A i B bedą wówczas ulegać zmianom do A' i B' ?

Zauważmy, że relacja jest podzbiorem, czyli zbiory, które wyznaczają relację mogą być dowolnie 'większe' od podzbiorów tych elementów, które faktycznie wchodzą w skład relacji.

W przypadku banku KPO, prościej jest założyć, że relacja $R \subseteq A \times B$ jest określona na zbiorach nadmiarowych, na tyle dużych aby nie trzeba było wprowadzać żadnych zmian w trakcie długoterminowej działalności banku. Na przykład zbiór numerów kont można określić jako

$$A = \{n \in \mathcal{N} : n < 10^8\}$$

.

Zauważmy, że nie jest to wybór jednoznaczny. Rownie poprawnie można przyjąć, że $A = \{x \in \mathcal{R} : n < 10^8\}$, a sprawą banku byłoby wówczas nadawanie nowym klientom kont o numerach będących liczbami całkowitymi.

Istnieją jednak dwa zbiory związane z daną relacją, które można określić w sposób jednoznaczny. W przypadku banku KPO są to zbiory **aktualnych** kont i nazwisk klientów.

Definicja 2 Niech $R \subseteq A \times B$ będzie relacją. Wówczas *dziedziną* relacji R jest zbiór wszystkich elementów $a \in A$ takich, że $(a, y) \in R$ dla co najmniej jednego elementu $y \in B$, to jest zbiór

$$\{a \in A : \exists y \in B \ (a R y)\}$$

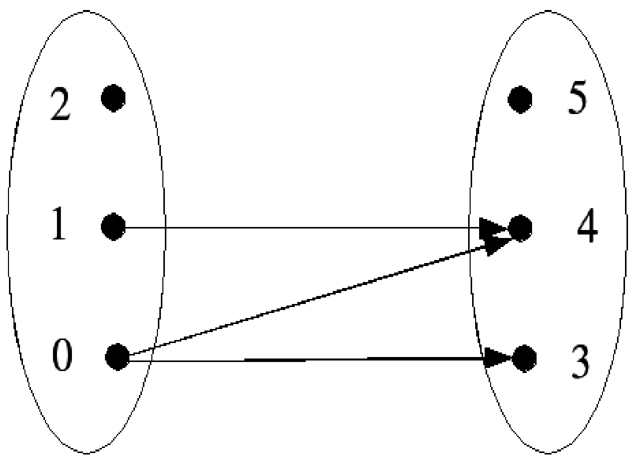
Podobnie, *zakresem* lub *kodziedziną* relacji R jest zbiór wszystkich elementów $b \in B$ takich, że $(x, b) \in R$ dla co najmniej jednego elementu $x \in A$, to jest zbiór

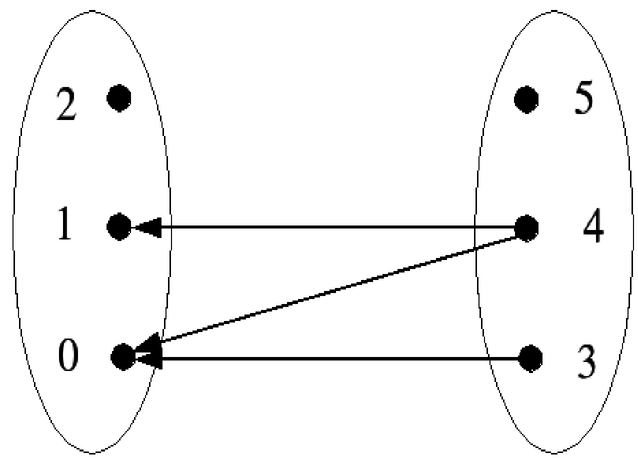
$$\{b \in B : \exists x \in A \ (x R b)\}$$

RELACJE ODWROTNE

Definicja 3 Jeżeli $R \subseteq A \times B$ to jej *inwers* (lub *relacja odwrotna*) jest określona jako $R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in R\}$

$R \subseteq \{0,1,2\} \times \{3,4,5\}$ $\qquad$ $R^{-1} \subseteq \{3,4,5\} \times \{0,1,2\}$





Wynika z tego że $b \ R^{-1} \ a \iff a \, R \, b$

Przykład 5 Dla zbiorów $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{2,4\}$ i wcześniej wyznaczonej relacji R : 'a jest podzielnikiem b'

$$R = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4)\}$$

wyznaczymy relację odwrotną R^{-1} : 'b jest wielokrotnością a'

$$R^{-1} = \{(2,1),(4,1),(2,2),(4,2)\}$$

Przykład 6 Relacją odwrotną do relacji

$$R = \{(z,n) : z \in \mathcal{Z},\ n \in \mathcal{N},\ z^2 = n\}$$

jest relacja

$$R^{-}1 = \{(n,z) : z \in \mathcal{Z},\ n \in \mathcal{N},\ z^2 = n\}$$

ZŁOŻENIE RELACJI

Przykład 7 Biblioteka gromadzi dane w dwóch plikach:

1. pliku wypożyczeń, złożonego z rekordów zawierających numer karty bibliotecznej czytelnika a i listę numerów katalogowych b książek, które ten czytelnik wypożyczył
2. katalogu, złożonego z rekordów zawierających nr katalogowy książki b i dane o książce (tytuł, autor) c

Biblioteka chce przypomnieć użytkownikom, jakie książki wypożyczyli, a zatem potrzebuje:

- plik złożony z rekordów zawierających numer czytelnika a i dane poszczególnych książek c, które aktualnie posiada ten czytelnik

Jeżeli symbolicznie określimy pierwszy plik jako relację $a \to b$, a drugi jak o relację $b \triangleright c$, to potrzebny jest nam plik wyrażający relację $a \sim c$

ZŁOŻENIE RELACJI - definicja

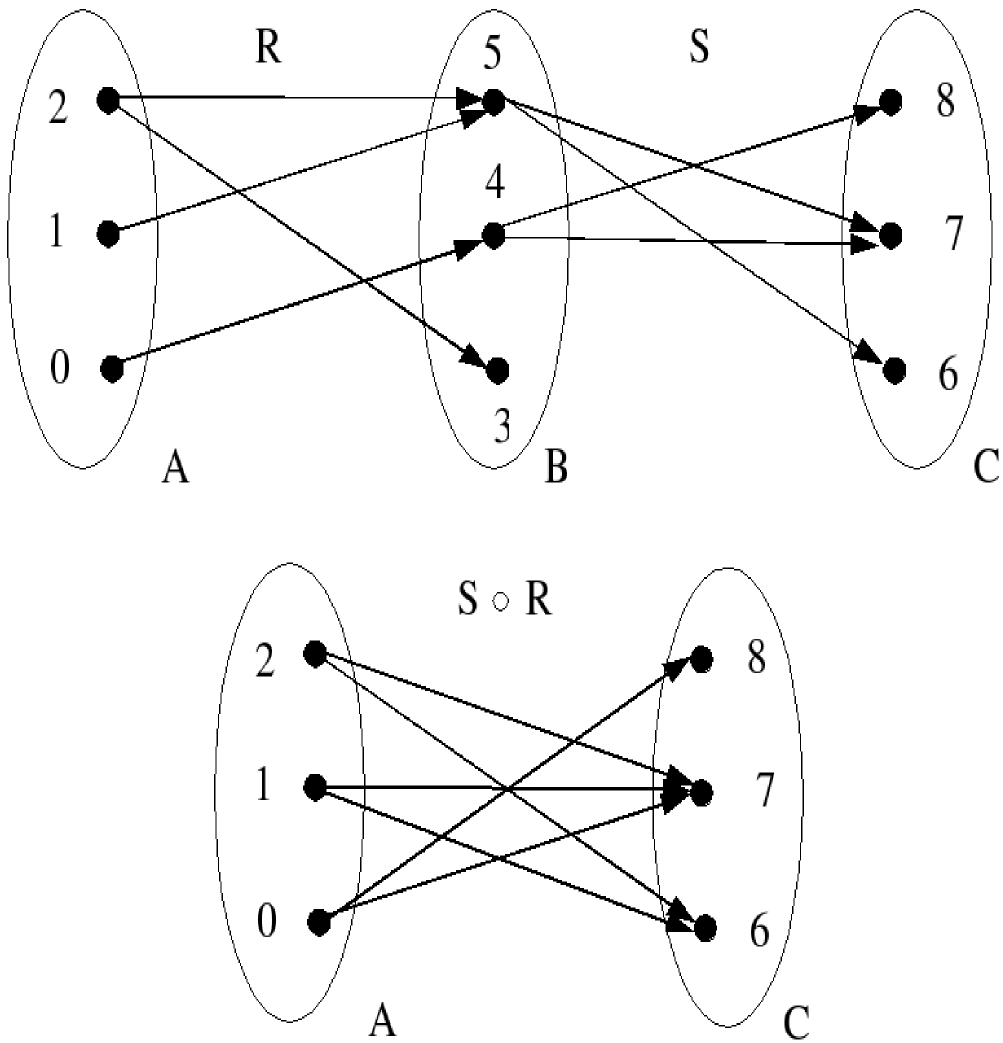
Relacja $a \sim c$ z poprzedniego przykładu jest kompozycją dwóch relacji: relacji $b \triangleright c$ z relacją $a \to b$.

Definicja 4 Niech $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times C$ będą dwiema relacjami. Relacja $S \circ R \subseteq A \times C$ jest zdefiniowana jako

$$S \circ R = \{(a,c) : a \in A,\ c \in C,\ \exists b \in B\ (aRb \wedge bSc)\}$$

i nazywana *kompozycją* (lub *złożeniem*) S z R.

ZŁOŻENIE RELACJI - ilustracja



ZŁOŻENIE RELACJI - przemienność

Kompozycja relacji **nie jest** w ogólności przemienna, tj. istnieją relacje R i S takie, że $S \circ R \neq R \circ S$

Przykład 8 Rozważmy relacje:

$$R = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 20\} \quad \text{i} \quad S = \{(x^2, x) : x \in \mathcal{R}\}$$

Zauważmy, że $(4,2) \in S$ i $(2,4) \in R$, a zatem $(4,4) \in R \circ S$.
Jednakże $(4,4) \notin S \circ R$ ponieważ:

- jeżeli $(4,4) \in S \circ R$ to istnieje $(4,y) \in R$ i $(y,4) \in S$.
- istnieje tylko jedno y takie, że $(y,4) \in S$, tj. $y = 16$
- $4^2 + 16^2 \neq 20$, a zatem $(4,4) \notin R$

Przykład 9

Rozważmy relację $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times C$ opisane na zbiorach osób A, B i C, gdzie $(a,b) \in R$ oznacza "a jest dzieckiem b" i $(b,c) \in S$ oznacza "b jest dzieckiem c".

Kompozycja $S \circ R$ składa się z par (a,c) takich, że a jest wnukiem/wnuczką c.

Jeżeli A i C są zbiorami rozłącznymi, np. gdy A oznacza najmłodsze pokolenie, B - średnie, a C najstarsze pokolenie, to kompozycja $R \circ S$ jest zbiorem pustym, ponieważ nie istnieje y takie, że $(b,y) \in S$ i $(y,b) \in R$.

ZŁOŻENIE RELACJI - łączność

Twierdzenie 1 Dla dowolnych relacji $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ i $T \subseteq C \times D$ zachodzi:

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

Dowód.

Rozważmy parę $(a,d) \in (T \circ S) \circ R$. Relacja taka zachodzi, jeżeli istnieje $b \in B$ takie, że $(a,b) \in R$ i $(b,d) \in (T \circ S)$. Ostatni warunek zachodzi wtedy i tylko wtedy, jeżeli istnieje $c \in C$ takie, że $(b,c) \in S$ i $(c,d) \in T$. Dokładnie to samo można pokazać analizując parę $(a,d) \in T \circ (S \circ R)$, co dowodzi, że twierdzenie jest prawdziwe.

RELACJE BINARNE

Relacje binarne są to relacje dwuargumentowe zachodzące między elementami tego samego zbioru

$$R \subseteq A \times A$$

Każda relacja dwuargumentowa

$$R \subseteq A \times B$$

jest w istocie binarna. Przyjmijmy

$$C = A \cup B$$

i zauważmy, że

$$R \subseteq C \times C$$

Dla relacji binarnej R określonej na zbiorze A przyjmuje się oznaczenia:

$$R^1 = R, \quad R^2 = R \circ R, \quad R^3 = (R \circ R) \circ R, \ \ldots$$

$$R^0 = \{(a,a) : a \in A\}$$

$$R^{-1} = R^{-1}, \quad R^{-2} = R^{-1} \circ R^{-1}, \quad R^3 = (R^{-1} \circ R^{-1}) \circ R^{-1}, \ \ldots$$

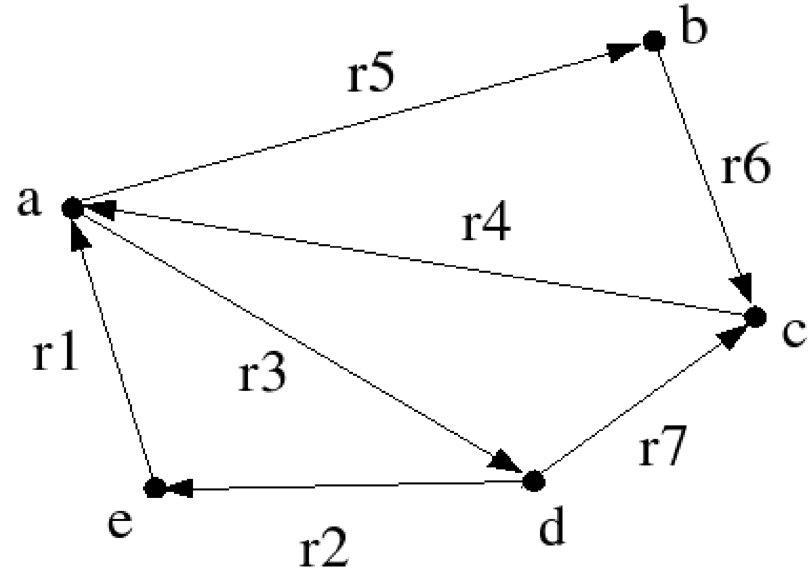
Przykład 10

Niech P będzie zbiorem ludzi, na którym jest określona relacja R taka, że $(a,b) \in R$ oznacza, że a jest ojcem/matką b. Wówczas $(a,b) \in R^2$ oznacza, że a jest babcią/dziadkiem b, a $(a,b) \in R^3$, że a jest prababcią/pradziadkiem b.

Podobnie, $(a,b) \in R^{-1}$ oznacza, że a jest dzieckiem b,
$(a,b) \in R^{-2}$, że a jest wnukiem/wnuczką b, a
$(a,b) \in R^{-3}$, że a jest prawnukiem/prawnuczką b.

GRAFOWA REPREZENTACJA RELACJI

Para $G = (A, R)$, taka że $R \subseteq A \times A$, jest *grafem skierowanym*. Rysunkowo graf G jest reprezentowany przez zbiór punktów (wierzchołków grafu) i zbiór skierowanych łuków. Wierzchołki odpowiadają elementom zbioru A. Łuk od od a do b istnieje wtedy i tylko wtedy jeżeli $(a, b) \in R$.



$A = \{a, b, c, d, e\}$

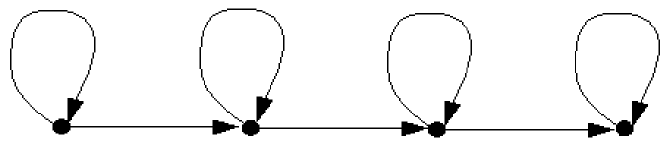
$R = \{r_1, \ldots, r_7\} = \{(e, a), (d, e), (a, d), (c, a), (d, c), (a, b), (b, c)\}$

WŁASNOŚCI RELACJI BINARNYCH

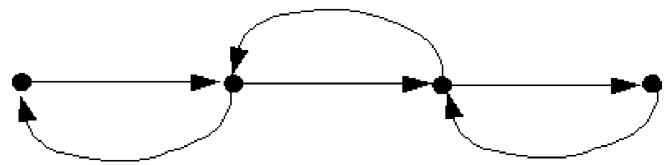
Relacja $R \subseteq A \times A$ jest:

- *zwrotna*, jeżeli $R^0 \subseteq R$,
  tj. $\forall a \in A, (a,a) \in R$
- *symetryczna*, jeżeli $R = R^{-1}$,
  tj. $(a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R$.
- *przeciw-symetryczna*, jeżeli $R \cap R^{-1} \subseteq R^0$,
  tj. $(a,b) \in R \land (b,a) \in R \Rightarrow b = a$
- *przechodnia*, jeżeli $R^2 \subseteq R$,
  tj. $(a,b) \in R \land (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$
- *spójna*, jeżeli $\forall a,b \in A \; ((a,b) \in R \lor (b,a) \in R)$

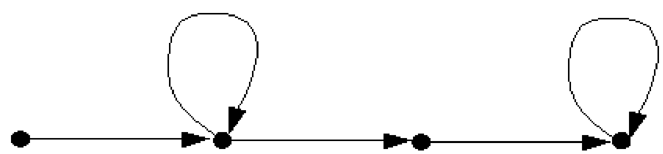
- relacja zwrotna



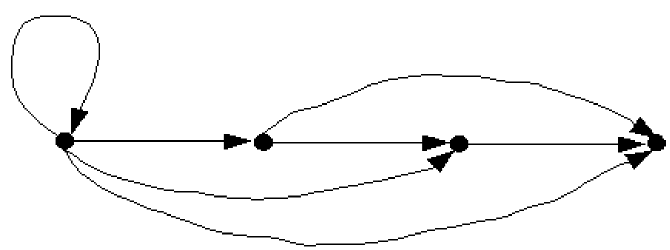
- relacja symetryczna



- relacja anty-symetryczna



- relacja przechodnia



DOMKNIĘCIE PRZECHODNIE

Jeżeli R jest relacją binarną na zbiorze A i jeżeli dla każdej pary $(a,b) \in R$ istnieją elementy $c_1, c_2, \ldots, c_{n_{ab}} \in A$ takie że

$$a\,R\,c_1,\ c_1\,R\,c_2, \ldots,\ c_{n_{ab}}\,R\,b$$

to mówimy, że zachodzi relacja $a\,R^+\,b$ i nazywamy R^+ *przechodnim domknięciem* relacji R

Definicja 5 Niech R będzie binarną relacją na A.
Przechodnie domknięcie R^+ relacji R jest określone przez:

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

a zwrotne przechodnie domknięcie R^* przez:

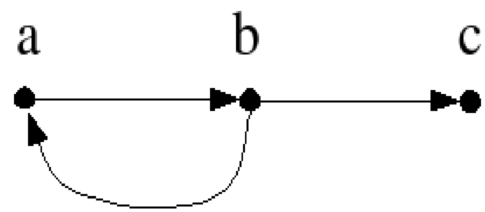
$$R^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$$

Przykład 11

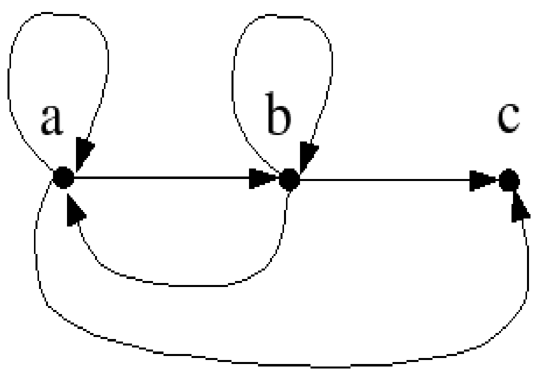
$R = \{(a,b),(b,a),(b,c)\}$

$R^{+} = \{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a),(b,c),(a,c)\}$

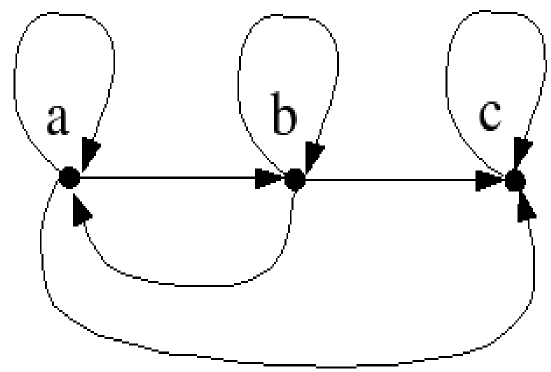
$R^{*} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(a,c)\}$



(A,R)



(A,R^{+})



(A,R^{*})

RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI

Definicja 6
Relacja binarna R na zbiorze A jest *relacją równoważności* jeżeli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Przykład 12
Niech A będzie zbiorem ludzi, a R relacją taką, że $(a,b) \in R$ oznacza "a i b mają takiego samego koloru oczy". Relacja R jest relacją równoważności, bo:

- R jest zwrotna: a ma takie same oczy jak a
- R jest symetryczna: jeżeli a ma takie same oczy jak b, to b ma takie same oczy jak a
- R jest przechodnia: jeżeli a ma takie same oczy jak b i b ma takie same oczy jak c to a ma takie same oczy jak c

PODZIAŁ ZBIORU

Definicja 7 Niech A będzie skończonym zbiorem i niech $A_1, \ldots, A_m$ będą jego podzbiorami takimi że $\forall i \in 1..m,\ A_i \neq \emptyset,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ i

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$$

Mówimy wówczas, że zbiory A_i *dzielą* zbiór A i nazywamy te zbiory *klasami podziału*.

Jeżeli zbiór A jest nieskończony, to rozważamy rodzinę zbiorów A_i takich, że i jest elementem skończonego lub nieskończonego zbioru indeksów I. Rodzina A_i *dzieli* zbiór A jeżeli $\forall i \in 1..m,\ A_i \neq \emptyset,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ i

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

PODZIAŁ ZBIORU - przykłady

Podział zbioru A oznacza utworzenie rodziny wzajemnie rozłącznych podzbiorów, z których żaden nie jest pusty i których suma stanowi zbiór A.

Przykład 13 Zbiór $\mathcal{Z}$ można podzielić na dwie klasy: liczb parzystych i liczb nieparzystych

Przykład 14 Zbiór rzeczowników w języku polskim dzieli się na trzy klasy: rodzaju męskiego, żeńskiego i nijakiego

Przykład 15 Zbiór instrukcji w języku Pascal dzieli się na 11 klas:

1) przypisania
2) wywołania procedur
3) bloki BEGIN .. END
4) instrukcje IF
5) instrukcje CASE
6) instrukcje WHILE
7) instrukcje REPEAT
8) instrukcje FOR
9) instrukcje WITH
10) instrukcje GOTO
11) instrukcje puste

KLASY RÓWNOWAŻNOŚCI

Definicja 8 Niech $\sim$ będzie relacją równoważności na zbiorze A. Dla każdego $a \in A$ zdefiniujemy $\bar{a}$ jako

$$\bar{a} = \{x \in A : a \sim x\}$$

Zbiór ten nazywa się *klasą równoważności a*.

Twierdzenie 2 Klasy równoważności relacji równoważności na A tworzą podział zbioru A.

Dowód. Łatwo zauważyć, że dowolne dwie klasy równoważności $\bar{a}_1$ i $\bar{a}_2$ są albo identyczne albo rozłączne. Ponadto, suma wszystkich takich klas jest równa zbiorowi A.

PORZĄDKI

Definicja 9 Relacja dwuargumentowa R określona na zbiorze A jest *relacją porządkującą liniowo* lub *porządkiem liniowym*, jeżeli jest zwrotna, antysymetryczna, przechodnia i spójna. Parę (A, R) nazywa się zbiorem uporządkowanym liniowo.

Przykład 16 Relacja niewiększości $\leq$ jest porządkiem liniowym w zbiorze $\mathcal{R}$.

Definicja 10 Relacja dwuargumentowa R określona na zbiorze A jest *relacją porządkującą częściowo* lub *porządkiem częściowym*, jeżeli jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia (natomiast nie musi być spójna). Parę (A, R) nazywa się zbiorem uporządkowanym.

Przykład 17 Dowolna rodzina zbiorów z relacją inkluzji $\subseteq$ jest zbiorem uporządkowanym.

RELACJE WIELOARGUMENTOWE

Definicja 11 Relacja n-argumentowa R na zbiorach $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jest określona jako

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

Zamiast zapisu stosowanego dla relacji binarnych $a_1 R a_2$ możemy tu dla oznaczenia n-tki $(a_1, \ldots, a_n) \in R$ użyć notacji $R(a_1, \ldots, a_n)$

Przykład 18 Niech D będzie zbiorem uczniów pewnej klasy, M zbiorem ich matek, a O zbiorem ich ojców. Relacja rodzicielstwa $R \subseteq D \times M \times O$ składa się z takich trójek (d, m, o), że m jest matka, a o jest ojcem dziecka d.