FUNKCJE

(odwzorowania)

W matematyce *funkcją* ze zbioru X w zbiór Y nazywa się odwzorowanie (przyporządkowanie), które każdemu elementowi zbioru X przypisuje jeden, i tylko jeden element zbioru Y.

Zbiór X nazywamy *dziedziną funkcji*, jego elementy *argumentami*, zaś zbiór Y - przeciwdziedziną funkcji. Element y zbioru Y, który jest przypisany danemu x ze zbioru X nazywamy *obrazem* x, albo wartością funkcji dla argumentu x. Podzbiór zbioru Y złożony z tych elementów y, które zostały przyporządkowane argumentom nazywamy *zbiorem wartości* funkcji $f(x)$.

W matematyce określenia: funkcja, przekształcenie, odwzorowanie, transformacja, operator itd. są synonimami.

Na funkcje można nakładać dodatkowe warunki, takie jak różnowartościowość, suriektywność, wzajemną jednoznaczność czy ciągłość.

Funkcje można rozpatrywać jako osobne obiekty i wykonywać na nich działania, takie jak dodawanie, mnożenie, składanie

DEFINICJA FORMALNA

Definicja 1

- *Funkcja częściowa* jest relacją $f \subseteq X \times Y$, która spełnia następujący warunek:

$$\forall x \in X, \forall y, z \in Y \ \left(x\, f\, y \ \wedge \ x\, f\, z \Rightarrow y = z \right) \tag{1}$$

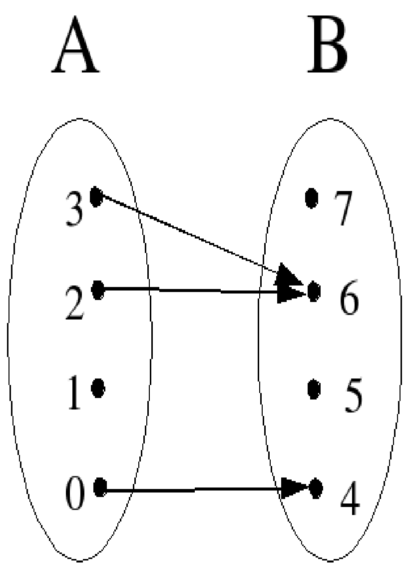
- *Funkcja pełna* jest relacją $f \subseteq X \times Y$, która spełnia spełnia dwa warunki: warunek (1) i warunek (2)

$$\forall x \in X, \exists y \in Y \ \left(x\, f\, y \right) \tag{2}$$

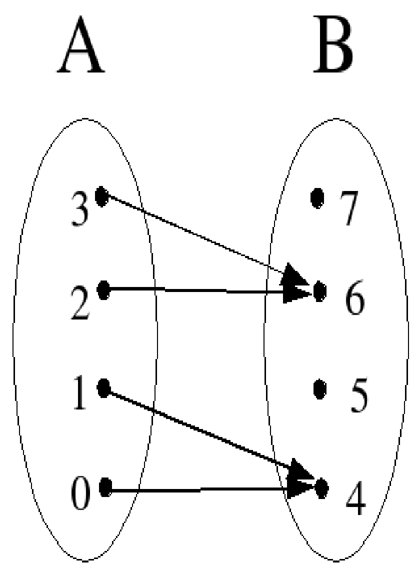
- Zbiorem wartości funkcji $f : X \rightarrow Y$ nazywamy zbiór tych wszystkich $y \in Y$, dla których istnieje taki argument $x \in X$, że $f(x) = y$.

Czyli:

- każdy element dziedziny funkcji musi być w relacji z dokładnie jednym elementem przeciwdziedziny
- funkcja częsciowa nie jest określona na całym zbiorze, a tylko w swojej dziedzinie



funkcja
częściowa



funkcja
(pełna)

Przykład 1

$$R = \{(x, 1/x) : x \in \mathcal{R}, x \neq 0\} \subset \mathcal{R}^2$$

jest binarną relacją na R, a także funkcją częściową ponieważ dla $x = 0$ relacja ta nie jest określona, a dla każdego $x \neq 0$ istnieje tylko jedna para $(x, 1/x)$.

Przykład 2

$$R = \{(x^2 + 1, 2x + 3) : x \in \mathcal{R}\}$$

jest relacją, ale nie jest funkcją. Dla $x = 1$ otrzymujemy parę $(2, 5)$, a dla $x = -1$, pare $(2, 1)$. A zatem warunek (1) nie jest spełniony.

Przykład 3 Niech P będzie zbiorem ludzi, a $S = \{$*kobiety,mężczyźni*$\}$. Przypisując każdej osobie $p \in P$ jej płeć $s \in S$ otrzymujemy funkcję $f : P \to S$

Przykład 4 Niech $P = \mathcal{P}(U)$ będzie zbiorem potęgowym zbioru U, a $c : P \to \mathcal{N}$ będzie określone przez $c(S) = |S|$ dla każdego $S \in P$, tj. dla każdego $S \subseteq U$. Funkcja c odwzorowuje dowolny podzbiór U w jego moc (liczbę elementów).

Definicja 2 Funkcje $f : A \to B$ i $g : X \to Y$ są uważane za *identyczne* wtedy i tylko wtedy jeżeli $A = X$, $B = Y$ i $f(a) = g(a)$ dla każdego $a \in A$.

Przykład 5 Funkcje $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$, $g : \mathcal{Z} \to \mathcal{N}$ i $h : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ określone regułami $f(n) = g(n) = h(n) = |n|$ nie są identyczne.

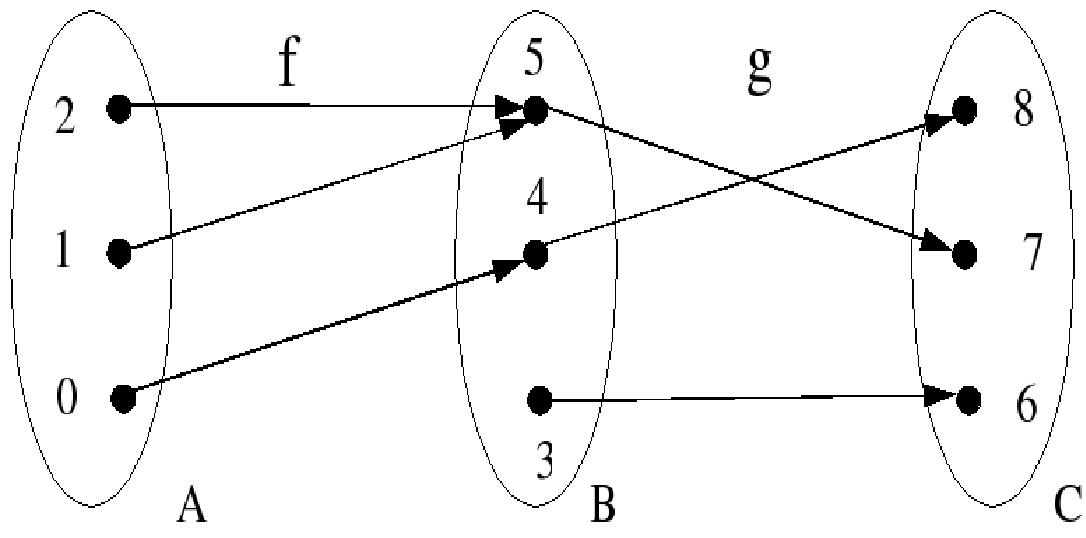
ZŁOŻENIA FUNKCJI

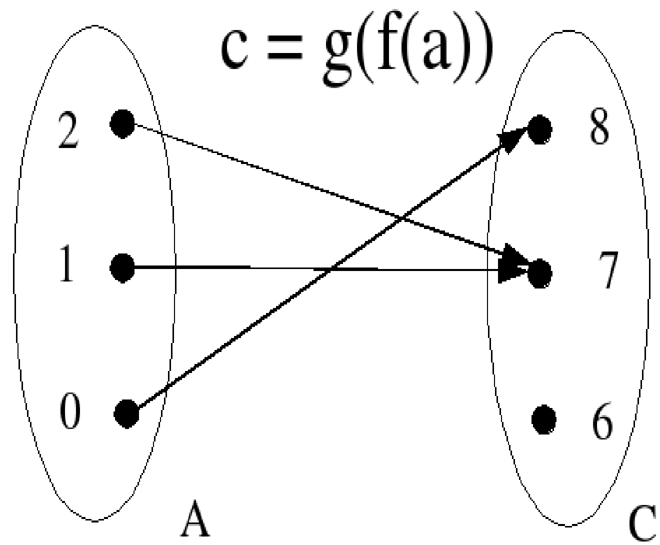
Definicja 3 Niech $f : A \to B$ i $g : B \to C$ będą dwiema funkcjami. *Złożenie* $g \circ f : A \to C$ funkcji g i f definiuje się jako funkcję $g \circ f(a) = g(f(a))$ dla każdego $a \in A$.

Można sprawdzić, że funkcje g i f zostały złożone tak, jak sie składa relacje. Jeżeli $f(a) = b$ to $(a,b) \in f$. Jeżeli $g(b) = c$ to $(b,c) \in g$. A zatem, zgodnie z definicją kompozycji relacji

$$(a,c) \in g \circ f \quad \text{lub} \quad g \circ f(a) = c$$

Teraz widać dlaczego przy składaniu relacji lepiej jest zapisywać ich kompozycje w odwrotnym porządku. Notacja $g \circ f$ jest zgodna z notacją $g(f(a))$.


f
g
2
1
0
5
4
3
8
7
6
A
B
C


c = g(f(a))
2
1
0
8
7
6
A
C

Przykład 6 Producent ma listę wszystkich części, jakie są mu dostarczane, wraz z nazwiskami dostawców. Ponadto ma listę nazwisk dostawców wraz z ich adresami. Aby uzyskać adres dostawcy określonej części producent składa dwie funkcje $s : P \to S$ i $a : S \to A$ aby uzyskać $a \circ s : P \to A$. $a(s(p))$ reprezentuje adres dostawcy części p.

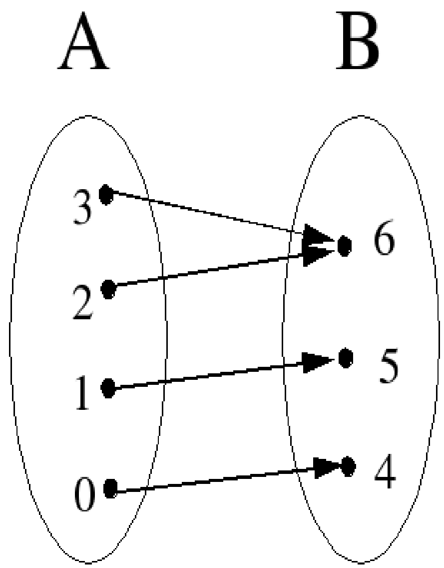
SURIEKCJA, INIEKCJA, BIJEKCJA

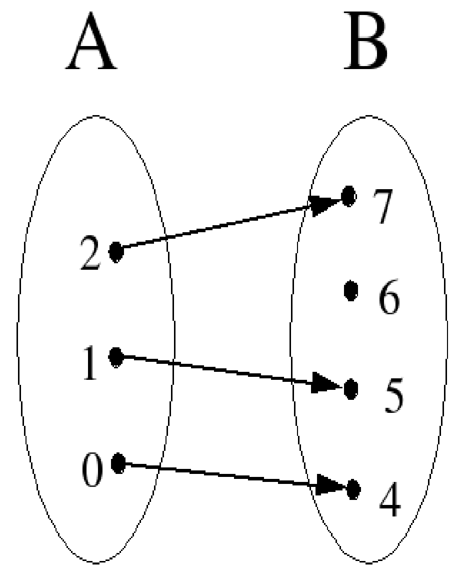
Definicja 4 Funkcja $f : A \to B$ jest *suriekcją* (odwzorowaniem *'na'*) jeżeli zbiór jej wartości $\{b = f(a), a \in A\} = B$

Definicja 5 Funkcja $f : A \to B$ jest *iniekcją* (odwzorowaniem różnowartościowym) jeżeli $f(a_1) = f(a_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$

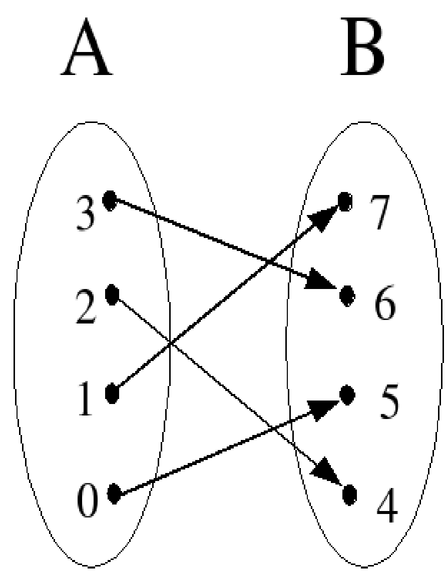
Definicja 6 Funkcja $f : A \to B$ jest *bijekcją* (odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym) jeżeli jest zarówno suriekcją i iniekcją, tj. dla każdego $b \in B$ istnieje dokładnie jedno $a \in A$ takie, że $b = f(a)$.

suriekcja





iniekcja



bijekcja

PRZYKŁADY

Przykład 7 Z okazji wprowadzenia na rynek nowego samochodu firma motoryzacyjna urządza przyjęcie, na które zaprasza wszystkich swoich klientów z ubiegłych lat. Aby wysłać zaproszenia firma korzysta ze swoich plików danych, które zawierają sprzedane auta C oraz nazwiska i adresy klientów O.

- funkcja $f : C \to O$ samochodów w klientów jest suriekcją, gdyż baza zawiera tylko te osoby, które kupiły auta
- funkcja $f : C \to O$ może, ale nie musi byc iniekcja, gdyż niektórzy klienci mogli kupić więcej niz jedno auto.

Przykład 8 Niech funkcja $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ będzie zdefiniowana przez

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/x & \text{jeżeli } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{jeżeli } \ x = 0 \end{cases}$$

Pokażemy, że funkcja f jest suriekcją wykazując, że każdy element $y \in \mathcal{R}$ jest wartością funkcji f. Jeżeli $y = 0$ to dla $x = 0$, $f(x) = y$. Jeżeli $y \neq 0$ to, aby istniało x takie że $f(x) = y$, musi być spełnione $(x^2 - 1)/x = y$, czyli $x^2 - yx - 1 = 0$, czyli $x = \frac{1}{2}(y \pm \sqrt{y^2 + 4}$, czyli dla każdego y istnieją dwie wartości, których odwzorowanie daje y. A zatem funkcja f jest suriekcją.

Przykład 9 Niech

$$A = \{-2^{31}, -2^{31}+1, \ldots, 2^{31}-1\}$$

oraz

$$B = \{0, 1, \ldots, 2^{31}-1\}$$

Zdefiniujmy $f : A \to B$ przez $f(m) = m + 2^{31}$. Funkcja f jest bijekcją pomiędzy A i B

Powyższy przykład pokazuje sposób, w jaki w komputerach ujemne liczby całkowite są reprezentowane przez duże dodatnie liczby calkowite. W rzeczywistości B jest zbiorem klas równoważności liczb calkowitych *modulo* 2^{32}, $B = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{2^{32}-1}\}$.

Sposób reprezentacji liczb ujemnych w formie *dopełnienia do dwóch* ma prosty algorytm. Wybieramy potęgę 2^m na tyle dużą, aby pomieściła wszystkie liczby całkowite, które nas interesują, podwajamy ją, a następnie odwzorowujemy te liczby *modulo* 2^{m+1}, tak aby ujemne liczby były reprezentowane przez duże liczby dodatnie.

Zadanie 1 Udowodnij lub podaj kontrprzykład następujących stwierdzeń:

1. $f \circ g$ jest iniekcją $\Rightarrow$ f jest iniekcją
2. $f \circ g$ jest iniekcją $\Rightarrow$ g jest iniekcją
3. $f \circ g$ jest suriekcją $\Rightarrow$ f jest suriekcją
4. $f \circ g$ jest suriekcją $\Rightarrow$ g jest suriekcją

FUNKCJE ODWRACALNE

Funkcja jest specjalnym przypadkiem relacji, a relacja zawsze ma inwers. Jednak nie zawsze relacja odwrotna do danej funkcji jest funkcją.

Definicja 7 Funkcja $f : A \to B$ jest *odwracalna*, jeżeli istnieje funkcja $g : B \to A$ taka, że złożenie $g \circ f = \iota_A$ (tj. jest identycznością $g(f(a)) = a$) i złożenie $f \circ g = \iota_B$ (tj. jest identycznością $f(g(b)) = b$).

Przykład 10 Funkcja $f : \mathcal{Z}^+ \to \mathcal{N}$ określona przez $f(z) = z - 1$ jest odwracalna. Aby to pokazać, zdefiniujmy $g : \mathcal{N} \to \mathcal{Z}^+$ jako $g(n) = n + 1$. Zatem, dla każdego $z \in \mathcal{Z}^+$ zachodzi

$$g \circ f(z) = g(f(z)) = g(z-1) = (z-1)+1 = z$$

a dla każdego $n \in \mathcal{N}$

$$f \circ g(n) = f(g(n)) = f(n+1) = (n+1)-1 = n$$

FUNKCJE ODWROTNE

Definicja 8 jeżeli $f : A \to B$ jest funkcją odwracalną, to istnieje dokładnie jedna funkcja $g : B \to A$ taka, że $g \circ f = \iota_A$ i $f \circ g = \iota_B$. Funkcja ta jest nazywana *inwersem* lub funkcja odwrotną do f i oznaczana przez $g = f^{-1}$.

Z powyższej definicji wynika że:

$$f^{-1} \circ f = \iota_A \qquad \text{i} \qquad f \circ f^{-1} = \iota_B$$

Twierdzenie 1 Funkcja $f : A \to B$ jest funkcją odwracalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją.

Twierdzenie 1 pozwala nam użyć notacji funkcji odwrotnej nawet wtedy, kiedy nie potrafimy podać żadnej zamkniętej formuły określającej ten inwers.

Przykład 11 Niech

$$I = \{x \in \mathcal{R} : -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$$

oraz

$$J = \{x \in \mathcal{R} : -1 \leq x \leq 1\}$$

Łatwo zauważyć, że funkcja $sin : I \to J$ jest bijekcją, ponieważ jest monotonicznie rosnąca w rozważanym zbiorze. A zatem istnieje funkcja odwrotna $sin^{-1} : J \to I$. Możemy używac tej notacji i rozważac jej własności zanim nawet wyprowadzimy wzór pozwalający na obliczanie sin^{-1}.

INWERS KOMPOZYCJI FUNKCJI

Możemy oczekiwać, że inwers kompozycji funkcji będzie prosto powiązany z inwersami funkcji składowych. Należy jednak dobrze uważac na porządek ich składania.

Twierdzenie 2 Niech $f : A \to B$ i $g : B \to A$ będą funkcjami odwracalnymi. Wówczas funkcja $g \circ f$ jest odwracalna i określona przez

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Twierdzenie 3 Złożenie dwóch bijekcji jest bijekcją

Zadanie 2 Podaj dobrze określoną definicję iniekcji i suriekcji dla funkcji częściowej. Jakie warunki muszą być spełnione aby inwers funkcji częściowej był funkcją częściową?

PERMUTACJE

Definicja 9 Niech A będzie niepustym skończonym zbiorem i niech $f : A \to A$ będzie bijekcją. Funkcja f jest wówczas nazywana *permutacją* zbioru A.

Rozważając permutacje możemy sie ograniczyć do zbioru $\mathcal{N}$ lub $\mathcal{Z}^+$ ponieważ każdy inny zbiór może byc uporządkowany za pomocą indeksów z tych zbiorów. Wygodnie jest listować elementy zbioru A i jego permutacji f za pomocą listy wartości

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) \end{pmatrix}$$

Przykład 12 Dla

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$f(3) = 5$, $f(1) = 2$, itd.

Mówiąc o złożeniach permutacji, zazwyczaj zapisuje się je jako iloczyn $fg \equiv f \circ g$. Możemy zdefiniować $f^2 = ff$, $f^3 = fff = f \circ f \circ f$, itd. Zakładamy także, że f^0 jest funkcją identyczności ι_N oraz że f^{-1} jest inwersem funkcji f

Dla danego $n \in \mathcal{Z}^+$ istnieje $n!$ permutacji zbioru $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Będąc bijekcjami, wszystkie te permutacje są odwracalne, a zbiór z nich złożony nazywa się *grupą symetryczną* S_n.