Robotyka 1, III r AiR

Zestaw 2

1. Zbadać, czy podane niżej macierze są macierzami obrotu:

$$R_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{7}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

2. Dla macierzy $R = R(X, \pi/2) R(Y, \pi/2)$ wyznaczyć oś i kąt obrotu.

3. Dla macierzy $R = \mathrm{Euler}(\pi/2, 0, \pi/4)$ wyznaczyć oś i kąt obrotu oraz kąty $KKM(\varphi, \theta, \psi)$.

4. Wyznaczyć macierz obrotu odpowiadającą obrotowi wokół osi $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ o kąt $\varphi = \pi/2$.

5. Dla macierzy $R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ wyznaczyć kąty $\mathrm{Euler}(\varphi, \theta, \psi)$ i $KKM(\varphi, \theta, \psi)$

6. Udowodnić następujące związki między prędkością kątową w przestrzeni ω_s a prędkościami zmian kątów $\mathrm{Euler}(\varphi, \theta, \psi)$ i $KKM(\varphi, \theta, \psi)$:

$$\omega_s^{Euler} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \sin\theta \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix},$$

$$\omega_s^{KKM} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \cos\theta \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \cos\theta \\ 1 & 0 & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

7. Parametryzacja Cayleya: Pokazać, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R}^3$ macierz $R_a = (I_3 - [a])^{-1}(I_3 + [a])$ jest macierzą obrotu.