1 Interpretacje i modele

Pytanie 1: Czy interpretacja, która przyporządkowuje zmiennej zdaniowej p wartość 0 a zmiennej q wartość 1 jest modelem formuły $p \vee q$?

Pytanie 2: Czy każdy model formuły $p \wedge q$ jest również modelem formuły p ?

2 Równoważność logiczna i wynikanie logiczne

Pytanie 3: Czy formuła $p \Rightarrow q$ jest równoważna: $\neg q \Rightarrow \neg p$?

Pytanie 4: Czy $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv p \oplus q$?

Pytanie 5: Czy $\{p, q\} \models \neg p \vee \neg q$?

Pytanie 6: Czy $\{\neg p \vee \neg q\} \models p \Rightarrow q$?

Pytanie 7: Czy $\models \top$?

3 Teorie i twierdzenia teorii

Pytanie 8: Czy jeśli wiemy, że $p \wedge q \in \mathcal{T}$ to możemy być pewni, że $p \in \mathcal{T}$?

Pytanie 9: Czy $p \vee q \in \mathcal{T}(\{p \wedge q\})$?

Pytanie 10: Czy jeśli $\phi \in \mathcal{T}(U)$ to $U \models \phi$?

4 Rozwiązania

Pytanie 1: Czy interpretacja, która przyporządkowuje zmiennej zdaniowej p wartość 0 a zmiennej q wartość 1 jest modelem formuły $p \vee q$?

Odpowiedź: Tak. Ta interpretacja przyporządkowuje formule $p \vee q$ wartość 1 (zgodnie z tabelką definiującą wartości logiczne dla spójnika $\vee$), a więc jest jej modelem.

Pytanie 2: Czy każdy model formuły $p \wedge q$ jest również modelem formuły p ?

Odpowiedź: Tak. Każdy model formuły $p \wedge q$ musi przyporządkowywać wartość 1 zarówno zmiennej p jak i q, więc jest modelem każdej z nich.

Pytanie 3: Czy formuła $p \Rightarrow q$ jest równoważna: $\neg q \Rightarrow \neg p$?

Odpowiedź: Tak. Równoważność logiczna formuł pojawiła się już wcześniej, i łatwo sprawdzić (np. metodą zerojedynkową), że te formuły są równoważne.

Pytanie 4: Czy $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv p \oplus q$?

Odpowiedź: Tak. To ponownie jest pytanie o równoważność logiczną formuł, choć sformułowane z użyciem notacji $\equiv$. Ponownie możemy to sprawdzić metodą zerojedynkową. Spójnik $\oplus$ oznacza tzw. różnicę symetryczną, zwaną też alternatywą wykluczającą, i jest właśnie dokładną odwrotnością spójnika równoważności.

Pytanie 5: Czy $\{p, q\} \models \neg p \vee \neg q$?

Odpowiedź: Nie. Należy określić, czy każda interpretacja, która wartościuje wszystkie formuły w zbiorze po lewej strony operatora $\models$ jako 1, przyporządkowuje również jedynkę formule po prawej. Jednak każda taka interpretacja musiałaby przyporządkować jedynkę zarówno zmiennej p jak i q, a w takim przypadku musi przyporządkować zero zarówno $\neg p$ jak i $\neg q$, i zatem również formule $\neg p \vee \neg q$.

Pytanie 6: Czy $\{\neg p \vee \neg q\} \models p \Rightarrow q$?

Odpowiedź: Nie. Modelem formuły po lewej stronie operatora $\models$ jest każda interpretacja przyporządkowująca co najmniej jednej z dwóch zmiennych p i q wartość 0. Wśród tych interpretacji są jednak takie (lub taka), która zmiennej p przyporządkowuje wartość 1, a zmiennej q 0. Te interpretacje muszą przyporządkować wartość 0 formule $p \Rightarrow q$.

Pytanie 7: Czy $\models \top$?

Odpowiedź: Tak. Przypomnijmy sobie, że ten zapis oznacza, że formuła jest tautologią. A więc musimy odpowiedzieć na pytanie, czy formuła $\top$ jest tautologią, czyli formułą zawsze prawdziwą. Taka jednak właśnie jest definicja symbolu $\top$.

Pytanie 8: Czy jeśli wiemy, że $p \wedge q \in \mathcal{T}$ to możemy być pewni, że $p \in \mathcal{T}$?

Odpowiedź: Tak. Na początek zauważmy, że $p \wedge q \models p$, bo każda interpretacja, która przyporządkowuje jedynkę formule $p \wedge q$ musi ją również przyporządkować formule p. A w takim razie $p \in \mathcal{T}$ z samej definicji teorii jako zbioru formuł zamkniętego na konsekwencje logiczne.

Pytanie 9: Czy $p \vee q \in \mathcal{T}(\{p \wedge q\})$?

Odpowiedź: Tak. Wystarczy zauważyć, że $\{p \wedge q\} \models p \vee q$. Uzasadniamy to jak zwykle przez interpretacje: każda interpretacja, która spełnia formułę $p \wedge q$ musi przyporządkować jedynkę zarówno zmiennej p jak i q, a więc spełnia również formułę $p \vee q$. Odpowiedź na postawione pytanie wynika wprost z definicji teorii zbioru formuł $\mathcal{T}(\{p \wedge q\})$.

Pytanie 10: Czy jeśli $\phi \in \mathcal{T}(U)$ to $U \models \phi$?

Odpowiedź: Tak. To również wynika wprost z definicji teorii zbioru formuł $\mathcal{T}(U)$. Teoria zbioru formuł $\mathcal{T}(U)$ jest właśnie dokładnie zbiorem takich formuł ϕ, dla których $U \models \phi$.