1 Literały, klauzule, postać CNF

Pytanie 1: Czy $\bot$ jest literałem?

Pytanie 2: Czy $\neg\varphi$ jest literałem?

Pytanie 3: Czy $\neg p$ jest literałem?

Pytanie 4: Czy $p \wedge p$ jest literałem?

Pytanie 5: Czy $\neg p$ jest klauzulą?

Pytanie 6: Czy $\neg p \vee p$ jest klauzulą?

Pytanie 7: Czy $\Box$ jest klauzulą?

Pytanie 8: Czy $(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)$ jest w postaci CNF?

2 Reguły wnioskowania, dowody

Pytanie 9: Dla zbioru aksjomatów $\Delta = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ czy ciąg formuł $p, p \Rightarrow q$ jest dowodem formuły $p \Rightarrow q$?

Pytanie 10: Dla zbioru aksjomatów $\Delta = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ czy ciąg formuł q jest dowodem formuły q ?

Pytanie 11: Dla zbioru aksjomatów $\Delta = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ czy ciąg formuł p, r jest dowodem formuły r ?

Pytanie 12: Dla zbioru aksjomatów $\Delta = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ czy ciąg formuł q, r jest dowodem formuły r ?

Pytanie 13: Dla zbioru aksjomatów $\Delta = \{p, \neg q\}$ odpowiedz czy dowodem jest ciąg: $p, \neg q, \neg q \vee p, q \Rightarrow p$?

Pytanie 14: Dla zbioru aksjomatów $\Delta = \{p, \neg q \Rightarrow \neg q\}$ czy istnieje dowód formuły q ?

3 Rozwiązania

Pytanie 1: Czy $\bot$ jest literałem?

Odpowiedź: Nie. Literał może mieć negację lub nie, ale potem musi mieć zmienną zdaniową (literę).

Pytanie 2: Czy $\neg\varphi$ jest literałem?

Odpowiedź: Nie. Stosując notację przyjętą w tym wykładzie, oznaczenia: $\varphi, \psi, \omega, \ldots$ używane są na oznaczenie jakichś dowolnych formuł. W ogólnym przypadku nie mamy powodu przyjąć, że formuła φ jest pojedynczą zmienną zdaniową, a zatem formuła $\neg\varphi$ może nie być literałem. Prawidłowa odpowiedź brzmi: nie.

Pytanie 3: Czy $\neg p$ jest literałem?

Odpowiedź: Tak. To jest typowy literał i odpowiedź nie powinna budzić wątpliwości.

Pytanie 4: Czy $p \wedge p$ jest literałem?

Odpowiedź: Nie. Wątpliwość może budzić fakt, że formuła $p \wedge p$ jest równoważna formule p, która jest literałem, a więc czy nie powinno się odpowiedzieć, że $p \wedge p$ również jest literałem? Pojęcia literałów, klauzul, i postaci CNF odnoszą się do postaci zapisu formuły, a nie do tego, czemu są równoważne. Zatem w zapisie tak jak w pytaniu, formuła nie jest literałem.

Pytanie 5: Czy $\neg p$ jest klauzulą?

Odpowiedź: Tak. Klauzula jest alternatywą literałów, ale może być jednoelementowa, czyli składać się z jednego literału. Zatem ponieważ $\neg p$ jest literałem to jest również klauzulą.

Pytanie 6: Czy $\neg p \vee p$ jest klauzulą?

Odpowiedź: Tak. Dokładnie zgodnie z definicją, nic dodać nic ująć.

Pytanie 7: Czy $\Box$ jest klauzulą?

Odpowiedź: Tak. Jest to przyjęta notacja klauzuli pustej.

Pytanie 8: Czy $(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)$ jest w postaci CNF?

Odpowiedź: Nie. Zewnętrznym spójnikiem jest koniunkcja, tak jak jest w postaci CNF, ale w drugim nawiasie jest również spójnik koniunkcji, a więc formuła nie jest CNF. Tym samym nie jest również DNF.

Pytanie 9: Dla zbioru aksjomatów $\Delta = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ czy ciąg formuł $p, p \Rightarrow q$ jest dowodem formuły $p \Rightarrow q$?

Odpowiedź: Tak. Ciąg formuł składa się z formuł ze zbioru aksjomatów, i ostatni formuła ciągu jest równa twierdzeniu, więc ciąg jest dowodem tego twierdzenia.

Pytanie 10: Dla zbioru aksjomatów $\Delta = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ czy ciąg formuł q jest dowodem formuły q ?

Odpowiedź: Tak. Formułę q można uzyskać z formuł p i $p \Rightarrow q$ przy pomocy reguły wnioskowania *modus ponens*.

Pytanie 11: Dla zbioru aksjomatów $\Delta = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ czy ciąg formuł p, r jest dowodem formuły r ?

Odpowiedź: Nie. Co prawda istnieje dowód formuły r z tego zbioru aksjomatów, ale żadna z normalnych reguł wnioskowania nie pozwala jej uzyskać w jednym kroku, a zatem podany ciąg nie jest dowodem.

Pytanie 12: Dla zbioru aksjomatów $\Delta = \{p, p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}$ czy ciąg formuł q, r jest dowodem formuły r ?

Odpowiedź: Tak. Formułę q można uzyskać przez zastosowanie reguły *modus ponens* do formuł p i $p \Rightarrow q$. Następnie, tę samą regułę wnioskowania można ponownie zastosować wykorzystując właśnie otrzymaną formułę q i formułę ze zbioru aksjomatów $q \Rightarrow r$ otrzymując właśnie r.

Pytanie 13: Dla zbioru aksjomatów $\Delta = \{p, \neg q\}$ odpowiedz czy dowodem jest ciąg: $p, \neg q, \neg q \vee p, q \Rightarrow p$?

Odpowiedź: Tak. W dowodzie mogą pojawić się formuły ze zbioru aksjomatów, oraz formuły uzyskane z reguł wnioskowania.

Pierwsze dwie formuły dowodu (p i $\neg q$) przepisane są żywcem ze zbioru aksjomatów Δ.

Trzecia formuła ($\neg q \vee p$) daje się uzyskać z reguły wprowadzania alternatywy przyjmując $\varphi = \neg q$ i $\psi = p$. Zauważmy, że przesłanki reguły wnioskowania muszą być obecne w zbiorze aksjomatów (i w tym przypadku są), albo we wcześniejszej części dowodu.

Czwarta formuła dowodu ($q \Rightarrow p$) daje się uzyskać z reguły wprowadzania implikacji jeśli przyjmiemy $\varphi = q$ i $\psi = p$. Reguła ma jedną przesłankę, i w tej roli przyjmujemy formułę trzecią dowodu, dopiero co wcześniej otrzymaną.

Ponieważ wszystkie formuły w ciągu formuł zostały zapisane zgodnie z definicją dowodu, a wiec ten ciąg jest dowodem.

Pytanie 14: Dla zbioru aksjomatów $\Delta = \{p, \neg q \Rightarrow \neg q\}$ czy istnieje dowód formuły q ?

Odpowiedź: Tak. Zauważmy, że przyjmując $\varphi = \neg q$ i $\psi = \neg p$, moglibyśmy zastosować regułę wnioskowania *modus tollens* aby otrzymać formułę $\neg\varphi = \neg\neg q$, gdybyśmy tylko posiadali formułę $\neg\psi = \neg\neg p$. Jednak $\neg\neg p$ możemy uzyskać stosując metodę wprowadzania negacji na formule $\varphi = p$, a z otrzymanej w wyniku tych operacji formuły $\neg\neg q$ możemy wywieść q stosując metode eliminacji negacji. Tym samym poprawny dowód formuły q dla tego zbioru aksjomatów przy zastosowaniu wymienionych reguł wnioskowania jest: $\neg\neg p, \neg\neg q, q$.

Uwaga: na haszówce będzie udostępniony przyjęty zestaw reguł wnioskowania. Nie ma więc potrzeby robienia sobie takich list, albo uczenia się tych reguł na pamięć.

Przypomnienie — reguły wnioskowania

wprowadzenie negacji: $$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$$

eliminacja negacji: $$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$$

wprowadzenie koniunkcji: $$\frac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$$

eliminacja koniunkcji: $$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi, \psi}$$

wprowadzenie alternatywy: $$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi, \psi \vee \varphi}$$

eliminacja alternatywy: $$\frac{\varphi \Rightarrow \psi, \omega \Rightarrow \psi, \varphi \vee \omega}{\psi}$$

wprowadzenie implikacji: $$\frac{\neg\varphi \vee \psi}{\varphi \Rightarrow \psi}$$

eliminacja implikacji: $$\frac{\varphi \Rightarrow \psi}{\neg\varphi \vee \psi}$$

modus ponens: $$\frac{\varphi, \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}$$

modus tollens: $$\frac{\varphi \Rightarrow \psi, \neg\psi}{\neg\varphi}$$