# 1 Zadania: rachunek predykatów — podstawy, interpretacje, spełnialność

**Pytanie 1:** Czy $\forall P\ P(x)$ jest formułą rachunku predykatów?

**Pytanie 2:** Czy jeśli $t$ jest termem, to $(t \vee \neg t)$ może być formułą rachunku predykatów?

**Pytanie 3:** Czy $p(x)$ jest formułą atomową?

**Pytanie 4:** Czy $\neg p$ jest formułą atomową?

**Pytanie 5:** Czy jeśli $\varphi$ jest formułą rachunku predykatów to $\forall x\ \varphi$ jest poprawną formułą rachunku predykatów, nawet jeśli formuła $\varphi$ nie zawiera zmiennej wolnej $x$?

**Pytanie 6:** Czy formuła $p(x) \wedge (\forall x\ p(x))$ zawiera wolne(ą) zmienne(ą)?

**Pytanie 7:** Czy następująca formuła rachunku predykatów jest tautologią:

$$(\forall x P(x)) \Rightarrow (\exists x P(x))$$

**Pytanie 8:** Czy dla formuły $P(A)$ konsekwencją logiczną jest formuła $\exists x P(x)$ (inaczej: czy $P(A) \models \exists x P(x)$)?

**Pytanie 9:** Czy interpretacja spełniająca formułę $P(A)$ jest modelem formuły $P(A) \vee P(B)$?

**Pytanie 10:** Czy interpretacja spełniająca formułę $P(A) \vee P(B)$ jest modelem formuły $P(A)$?

**Pytanie 11:** Czy interpretacja spełniająca formułę $P(A)$ jest modelem formuły $P(x)$?

**Pytanie 12:** Czy interpretacja spełniająca formułę $P(x)$ jest modelem formuły $P(A)$?

## 2 Rozwiązania

**Pytanie 1:** Czy $\forall P\ P(x)$ jest formułą rachunku predykatów?

Odpowiedź: Nie.
Formułą może być zapis predyktaów ze spojnikami i kwantyfikatorami wiążącymi zmienne występujące w termach, które są argumentami predykatów. Kwantyfikatory nie mogą wiązać predyatów.

**Pytanie 2:** Czy jeśli $t$ jest termem, to $(t \vee \neg t)$ może być formułą rachunku predykatów?

Odpowiedź: Nie.
Formuły mogą być budowane jedynie z predykatów, natomiast termy są argumentami predykatów.

**Pytanie 3:** Czy $p(x)$ jest formułą atomową?

Odpowiedź: Tak.
Zgodnie z definicją, każdy 0-argumentowy predykat jest formułą atomową.

**Pytanie 4:** Czy $\neg p$ jest formułą atomową?

Odpowiedź: Nie.
Formuły atomowe są zapisem predykatów z argumentami w postaci termów, nie mogą jedna zawierać spójników logicznych, w tym negacji.

**Pytanie 5:** Czy jeśli $\varphi$ jest formułą rachunku predykatów to $\forall x\ \varphi$ jest poprawną formułą rachunku predykatów, nawet jeśli formuła $\varphi$ nie zawiera zmiennej wolnej $x$?

Odpowiedź: Tak.
Dokładnie zgodnie z definicją, przed każdą formułą można dopisać symbol kwantyfikatora z dowolną zmienną, i będzie to formuła rachunku predykatów.

**Pytanie 6:** Czy formuła $p(x) \wedge (\forall x\ p(x))$ zawiera wolne(ą) zmienne(ą)?

Odpowiedź: Tak.
Konkretnie zmienną $x$. Występuje ona w pierwszym członie koniunkcji, ponieważ zmienna $x$ w drugim członie koniunkcji jest związana kwantyfikatorem.

**Pytanie 7:** Czy następująca formuła rachunku predykatów jest tautologią:

$$(\forall x P(x)) \Rightarrow (\exists x P(x))$$

Odpowiedź: Tak.
Aby stwierdzić, że jakaś formuła jest tautologią musimy sprawdzić, czy wszystkie możliwe interpretacje z konieczności muszą przypisać jej wartość logiczną prawdy. Zauważmy, że każda interpretacja zadanej formuły musi mieć niepustą dziedzinę, i albo dla wszystkich elementów tej dziedziny relacja odpowiadająca $P(x)$ zachodzi, i wtedy zachodzi dla pewnego, wybranego elementu dziedziny, a wtedy obie strony implikacji

mają wartość prawdy logicznej, a więc prawdziwa jest cała formuła, albo $P(x)$ nie zachodzi dla wszystkich elementów, ale wtedy formuła musi mieć wartość prawdy logicznej na podstawie definicji spójnika implikacji.

**Pytanie 8:** Czy dla formuły $P(A)$ konsekwencją logiczną jest formuła $\exists x P(x)$ (inaczej: czy $P(A) \models \exists x P(x)$)?

Odpowiedź: Tak.
Ponownie musimy rozpatrywać wszystkie możliwe interpretacje, które przypisują formule $P(A)$ wartość prawdy logicznej. W dziedzinie każdej takiej interpretacji istnieje stała spełniająca relację odpowiadającą $P(x)$, a więc formule $\exists x P(x)$ ta interpretacja musi przypisać wartość prawdy logicznej.

**Pytanie 9:** Czy interpretacja spełniająca formułę $P(A)$ jest modelem formuły $P(A) \vee P(B)$?

Odpowiedź: Tak.
Interpretacja spełniająca formułę $P(A)$ przypisuje wartość prawdy logicznej formule $P(A)$, a więc również formule $P(A) \vee P(B)$.

**Pytanie 10:** Czy interpretacja spełniająca formułę $P(A) \vee P(B)$ jest modelem formuły $P(A)$?

Odpowiedź: Nie.
Właściwa odpowiedź na pytanie brzmi: nie wiadomo. Interpretacja spełniająca formułę $P(A) \vee P(B)$ może przypisać formule $P(B)$ wartość 1 a formule $P(A)$ wartość 0 i wtedy nie będzie jej modelem, albo może przypisać wartości logiczne na odwrót, i wtedy będzie. Jednak formułując pytanie w testach logicznych dodajemy zawsze do pytania "Czy" domyślny kwalifikator "na pewno", a zatem jeśli odpowiedź nie brzmi na pewno "Tak", to odpowiadamy: Nie.

**Pytanie 11:** Czy interpretacja spełniająca formułę $P(A)$ jest modelem formuły $P(x)$?

Odpowiedź: Nie.
Formuła $P(x)$ zawiera zmienną wolną i nie da się powiedzieć jakie interpretacje ją spełniają. Wartość logiczna takiej formuły jest nieokreślona, zatem na pytanie należy odpowiedzieć "Nie".

**Pytanie 12:** Czy interpretacja spełniająca formułę $P(x)$ jest modelem formuły $P(A)$?

Odpowiedź: ???.
Definicja funkcji wartościowania nie określa jej dla formuł otwartych, zatem nie wiadomo, co oznacza, że interpretacja spełnia taką formułę. Pytanie należy uznać za niewłaściwie postawione.